Olimpiada Naţională de Matematică, Etapa locală Dâmboviţa, 9 februarie 2013

CLASA A IX-A

1. Fie mulţimea $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{200}\}$.

a) Demonstraţi că dacă $(x, y) \in \mathcal{M}$, atunci numerele $2x$ şi $2y$ sunt pătrate perfecte.

b) Câte elemente are mulţimea $\mathcal{M}$?

2. Se consideră două numere naturale, diferite, $m, n \geq 1$. Într-o progresie aritmetică, suma primilor m termeni este egală cu suma primilor n termeni. Demonstraţi că suma primilor $m + n$ termeni ai acestei progresii aritmetice este egală cu zero.

3. Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 1$, are loc identitatea:

$$|1^4 - 2^4 + 3^4 - \cdots + (-1)^{n-1}n^4| = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

4. Fie $x, y, z \in [1,2]$. Demonstraţi că

$$9 \leq (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) < 10{,}5 .$$

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Olimpiada Naţională de Matematică, Etapa locală Dâmboviţa, 9 februarie 2013

CLASA A X-A

1. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia

$$\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-1.$$

2. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_1^3 = z_2^3 = z_1 + z_2$. Determinaţi z_1, z_2.

3. Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$ cu $b \geq \sqrt{ac}$ şi $c \geq \sqrt{bd}$. Demonstraţi că:

a) $\ln b + \ln c \geq \ln a + \ln d$.

b) $\ln b \cdot \ln c \geq \ln a \cdot \ln d$.

4. Determinaţi funcţiile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, \quad \text{oricare ar fi} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Olimpiada Naţională de Matematică, Etapa locală Dâmboviţa, 9 februarie 2013

CLASA A XI-A

1. Determinaţi matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $X^2 + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Demonstraţi că $|\det A| \leq 1$.

3. Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, următoarele relaţii

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n^2}},$$

unde $x_0 \in [0,1)$. Demonstraţi că $x_n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

4. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, cu proprietatea că

$$\lim_{x\to\infty} (f(2x) - f(x)) = 0.$$

Demonstraţi că pentru orice $a \in (0, \infty)$, avem

$$\lim_{x\to\infty} (f(ax) - f(x)) = 0.$$

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Olimpiada Naţională de Matematică, Etapa locală Dâmboviţa, 9 februarie 2013

CLASA A XII-A

1. Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}\sin\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{dacă } x=0\end{cases}\ ,\ \text{admite primitive.}$$

2. Calculaţi:

$$I=\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\ ,\quad J=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

3. Un grup G cu elementul neutru e are următoarele proprietăţi:

a) Există $a,b\in G\setminus\{e\}$, $a\neq b$, astfel încât $a^2=b^2=e$.

b) Există un subgrup H al lui G, $H\neq G$, astfel încât $G=H\cup\{a,b\}$.

Demonstraţi că G este izomorf cu grupul lui Klein.

4. Fie $(M,\cdot)$ un monoid finit cu elementul neutru 1 şi $a,b\in M$ cu $ab=1$.

Demonstraţi că $ba=1$.

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

BAREM CLASA A IX A

SUBIECTUL 1. $\sqrt{x}=\sqrt{200}-\sqrt{y} \Rightarrow x=200+y-2\sqrt{200y}$ (2p)
$\sqrt{200y}\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2y}\in\mathbb{Q} \Rightarrow 2y$ pătrat perfect și analog (2p)
Rezultă $x=2s^2$, $y=2t^2$, $s,t\in\mathbb{N}$ (1p) Ec. devine $s+t=10$ (1p)
cu soluțiile (s,t): $(0,10), (1,9), \ldots, (10,0)$ în număr de 11 (1p)

SUBIECTUL 2 $S_m=S_n \Rightarrow m\cdot\frac{a_1+a_m}{2}=n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}$ (1p) $\Rightarrow \frac{a_1+a_m}{a_1+a_n}=\frac{n}{m}$ (1p)
$\Rightarrow \frac{a_1+a_m}{a_n-a_m}=\frac{n}{m-n}$ (1p) $\Rightarrow \frac{a_1+a_m}{(n-m)r}=\frac{n}{m-n}$ (1p) $\Rightarrow a_1+a_m=-nr$
$\Rightarrow a_1+(a_m+nr)=0$ (2p) $\Rightarrow a_1+a_{m+n}=0 \Rightarrow S_{m+n}=0$ (1p)

SUBIECTUL 3 $P(n)$: $1^4-2^4+\ldots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$ (1p)
Verificare $n=1$ (2p) Pasul de inducție (4p)

SUBIECTUL 4 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$
$\geq 3+2+2+2=9$ (3p). $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq\frac{5}{2}$, etc (3p)
Finalizare (1p)
Obs. Se poate dem. că $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leq 10$.

BAREM CLASA A X A

SUBIECTUL 1. $\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{(2^x)^3+(3^x)^3}{2^x 3^x(2^x+3^x)}$ (1p) $=\frac{4^x-6^x+9^x}{6^x}$ (1p)

$=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$ (1p) Obt. $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=(2-\sqrt{3})^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ (1p)

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=(2-\sqrt{3})^x$ sau $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ (2p) $x=0$ (1p)

SUBIECTUL 2. $(z_1/z_2)^3=1$ (2p) $\frac{z_1}{z_2}\in\{1,\omega,\omega^2\}$ (2p)

$z_1=z_2$ (1p) $z_1=\omega z_2\Rightarrow z_1=\omega^2 i$ și $z_2=\omega i$ (1p)

$z_1=\omega^2 z_2\Rightarrow z_1=\omega i$ și $z_2=\omega^2 i$ (1p)

SUBIECTUL 3 Prin înmulțire, $bc\geq\sqrt{abcd}$ (1p), deci $bc\geq ad$ (1p)

$\Rightarrow \ln(bc)\geq\ln(ad)\Rightarrow \ln b+\ln c\geq \ln a+\ln d$ (1p).

$\ln b\geq\frac{1}{2}(\ln a+\ln c)\geq\sqrt{\ln a\cdot\ln c}$ și $\ln c\geq\frac{1}{2}(\ln b+\ln d)\geq\sqrt{\ln b\ln d}$ (2p)

și concluzia prin înmulțire (2p)

SUBIECTUL 4. $P(n): f(n)=n+1$. (1p)

Verificarea faptului că $f(0)=1$. Obs. $f(f(0))+f(0)=3$, deci $f(0)\in\{0,1,2,3\}$ (2p). $f(0)\neq 0$ (1p) $f(0)\neq 2$ (1p)

$f(0)\neq 3$ (1p). $f(k)=k+1\Rightarrow f(k+1)=k+2$ (2p)

BAREM CLASA A XI A

SUBIECTUL 1. Conform Cayley, X^2 este combinatie de X și I_2 și la fel și X^2+X. (2p) Fie $X^2+X = aX+bI_2 = O_2$ (2p)

Dacă $a\neq 0 \Rightarrow X=\lambda I_2$, $\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow X=O_2$, $X=-I_2$. (1p)

Dacă $a=0 \Rightarrow Tr\,X=-1 \Rightarrow \det X=0$ sunt soluții (2p)

SUBIECTUL 2 $x=ab+bc+ca\leq 1$. (1p) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$. (2p)

$(\det A)^2=\det(A\cdot A^t)$ (2p) $=1-x^2(3-2x)$ (2p) ≤ 1 (1p)

SUBIECTUL 3 $x_2=\dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}$ (1p) $=\dfrac{\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}}{\sqrt{1-\frac{x_0^2}{1-x_0^2}}}$ (1p)

$=\dfrac{x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}$ (1p) Prin inducție: $x_n=\dfrac{x_0}{\sqrt{1-nx_0^2}}$ (2p)

$1-nx_0^2>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (1p) $\Rightarrow x_0^2<\dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x_0=0$ (1p)

SUBIECTUL 4

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(4x)-f(2x)\right)=0$ (1p) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(4x)-f(x)\right)=0$ (1p)

Prin inducție $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2^n x)-f(x)\right)=0$ (2p) Pentru $x\to\dfrac{x}{2^n}$,

obț $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)-f(x)\right)=0$ (1p).

Fie $k\in\mathbb{Z}$ a.î. $2^k\leq a<2^{k+1}$, f cresc $\Rightarrow$

$$f(2^k x)-f(x)\leq f(ax)-f(x)\leq f(2^{k+1}x)-f(x)$$ (1p)

Finalizare, cu $x\to\infty$ (1p).

BAREM CLASA A XII A

SUBIECTUL 1. Funcția $h(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ a.p. (2p)

Dacă $H\in\int h$, atunci $(H(\mathrm{arctg}\,x))'=h(\mathrm{arctg}\,x)\cdot(\mathrm{arctg}\,x)'$ (2p) $=f(x)$, (2p) deci $H\circ \mathrm{arctg}\in\int f$ (1p)

SUBIECTUL 2 $I=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\int_0^{\pi/6}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$ (2p)

$=2\int_0^{\pi/6}\left(\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\mathrm{tg}\,x\right)dx$ (1p) și finalizare (2p)

$J=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-x\right)}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)dx$ (1p)

și finalizare (1p)

SUBIECTUL 3. $ab\notin\{e,a,b\}$ (2p) $H'=\{e,a,b,ab\}$ este grup (2p) $G=H\cup H'$, unde $H,H'\leq G$ sunt subgrupuri, deci $G=H$ sau $G=H'$. (1p)

Cum $G\neq H$, rezultă $G=H'\cong K$ (2p)

SUBIECTUL 4. Dacă $bx=by$, atunci $x=y$ ($bx=by\Rightarrow abx=aby\Rightarrow x=y$). (2p) Funcția $f:M\to M$, $f(x)=bx$ este injectivă, M finită $\Rightarrow f$ surj (2p)

$\exists\, c\in M$ a.î. $f(c)=1\Leftrightarrow bc=1$ (1p)

$c=(ab)c=a(bc)=a\Rightarrow c=a\Rightarrow ba=1$ (2p)