Al patrulea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 16 mai 2018

Problema 1. Demonstraţi că un număr natural A este pătrat perfect dacă şi numai dacă, pentru orice număr natural nenul n, cel puţin una din diferenţele

$$(A+1)^2 - A,\ (A+2)^2 - A,\ (A+3)^2 - A,\ \ldots,\ (A+n)^2 - A$$

este divizibilă cu n.

Olimpiadă Cehia şi Slovacia

Soluţie:
Dacă A este pătrat perfect, adică există $B \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B^2$, atunci $(A+k)^2 - A = (B^2+k)^2 - B^2 = (B^2+B+k)(B^2-B+k)$ pentru orice $k = \overline{1,n}$ şi exact unul dintre numerele (consecutive) B^2+B+1, $B^2+B+2, \ldots, B^2+B+n$ este divizibil cu n, de unde concluzia.
Reciproc, dacă A nu este pătrat perfect, atunci există un factor prim p care în descompunerea în factori primi a lui A apare la o putere impară. Fie p un asemenea număr prim şi $j \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^{2j-1} \mid A$, dar $p^{2j} \nmid A$. Alegem $n = p^{2j} \in \mathbb{N}^*$ şi arătăm că niciunul din numerele $(A+1)^2 - A$, $(A+2)^2 - A, (A+3)^2 - A, \ldots, (A+n)^2 - A$ nu este divizibil cu n. Într-adevăr, dacă $n \mid (A+m)^2 - A$, cu $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, adică $p^{2j} \mid A^2 + 2Am + m^2 - A$, cum $p^{2j-1} \mid A$, rezultă $p^{2j-1} \mid m^2$, de unde $p^j \mid m$. Dar atunci $p^{2j} \mid (A+m)^2$ şi $p^{2j} \mid (A+m)^2 - A$, deci $p^{2j} \mid A$, contradicţie.

Problema 2. Dacă $a, b, c > 0$, arătaţi că

$$\frac{a}{\sqrt{(a+2b)^3}} + \frac{b}{\sqrt{(b+2c)^3}} + \frac{c}{\sqrt{(c+2a)^3}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Alexandru Mihalcu

Soluţie:
Din inegalitatea lui Hölder avem: $\sum_{cycl} \frac{a}{\sqrt{(a+2b)^3}} \cdot \sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \cdot \sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \cdot \sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \geq (a+b+c)^4$, iar din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz rezultă
$\left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b}\right)^2 = \left(\sum_{cycl} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a(a+2b)}\right)^2 \leq (a+b+c) \cdot \sum_{cycl} (a^2+2ab) = (a+b+c)^3$, de unde concluzia.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$.

În loc de inegalitatea lui Hölder se putea aplica de două ori inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:

$$\sum_{cycl} \frac{a}{\sqrt{(a+2b)^3}} \cdot \sum_{cicl} a\sqrt{a+2b} \cdot \left(\sum_{cicl} a\sqrt{a+2b}\right)^2 \overset{CBS}{\geq}$$

$$\left(\sum_{cycl} \frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2 \cdot \left(\sum_{cicl} a\sqrt{a+2b}\right)^2 \overset{CBS}{\geq} \left(\sum_{cycl} a\right)^4. \qquad (1)$$

Pe de altă parte,

$$\left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b}\right)^2 = \left(\sum_{cycl} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a(a+2b)}\right)^2 \overset{CBS}{\leq} (a+b+c)(a(a+2b)+b(b+2c)+$$

$$c(c+2a)) = (a+b+c)^3, \text{ deci } \left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b}\right)^3 \leq \sqrt{(a+b+c)^9}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă imediat concluzia.
Egalitatea are loc dacă $a = b = c$.
Remarcă: Inegalitatea este o consecinţă directă a inegalităţii lui Jensen pentru funcţia convexă $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, numerele $x_1 = a + 2b$, $x_2 = b + 2c$, $x_3 = c + 2a$ şi ponderile $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

Problema 3. Alina şi Bogdan joacă următorul joc. Ei au o grămadă formată din 330 de pietricele. Cei doi jucători mută alternativ. La o mutare se iau din grămadă 1, n sau m pietricele. Câştigă jocul cel care ia ultima pietricică. Înainte de a începe, Alina alege numărul n, $(1 < n < 10)$, după care Bogdan alege numărul m, ($m \neq n$, $1 < m < 10$). Alina mută prima. Care din cei doi jucători are strategie de câştig? Dar dacă la început în grămadă sunt 2018 pietricele?

Olimpiadă Belarus, prelucrare

Soluţie:
Bogdan are strategie câştigătoare. Iată o astfel de strategie (există şi altele):
1. dacă Alina alege un număr n nedivizibil cu 3, atunci Bogdan alege $m = 2$ (sau un alt număr nedivizibil cu 3 dacă Alina a ales $n = 2$);
2. dacă Alina alege 3 sau 9, Bogdan alege 5;
3. dacă Alina alege 6, Bogdan alege 4.

1. În primul caz, Alina va lăsa în grămadă un număr de pietricele care nu este divizibil cu 3, Bogdan va lua 1 sau 2 pietricele pentru a lăsa mereu un număr de pietricele care este divizibil cu 3. Astfel, la final, el va fi cel care va ajunge să lase 0 pietricele.

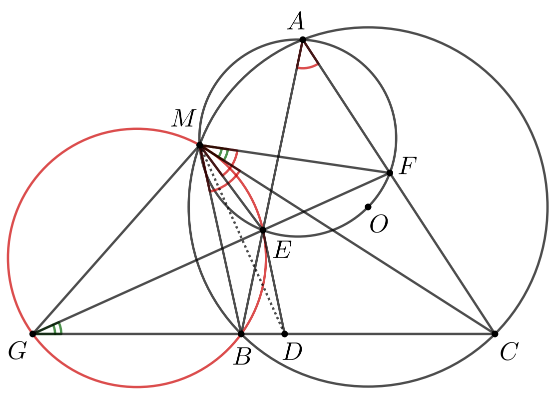
2. Dacă Alina alege un număr impar, în particular 3 sau 9, Bogdan alege un număr m impar şi ia de pe masă mereu o pietricică. Astfel, după mutările Alinei va rămâne un număr impar de pietricele, după mutările lui Bogdan, un număr par de pietricele. Aşadar ultima mutare o va face Bogdan.
3. Dacă Alina alege 6, Bogdan alege 4 şi va muta astfel: dacă Alina ia 1 sau 6 pietricele, Bogdan ia 4, iar dacă Alina ia 4, Bogdan ia una, astfel încât după mutările lui Bogdan numărul pietricelelor să fie mereu multiplu de 5. Cum iniţial numărul pietricelelor este multiplu de 5, Alina va urma la mutare mereu când pe masă există $5k$ pietricele şi ea nu va putea câştiga.

Dacă iniţial pe masă sunt 2018 pietricele, Alina câştigă alegând $n = 2$.
- Dacă Bogdan alege $m \in \{4, 5, 7, 8\}$, Alina mută astfel încât să lase mereu un număr de pietricele divizibil cu 3 (iniţial ia 2 pietricele).
- Dacă Bogdan alege $m = 3$, Alina mută astfel încât să lase mereu un număr de pietricele divizibil cu 4 (iniţial ia 2 pietricele). (Apoi, dacă Bogdan ia 1, 2 sau 3 pietricele, Alina ia 3, 2, respectiv 1 pietricele, lăsând din nou un număr de pietricele divizibil cu 4.)
- Dacă Bogdan alege $m = 6$, Alina mută astfel încât să lase mereu un număr de pietricele care să dea unul din resturile 0 sau 3 la împărţirea cu 7 (iniţial ia 2 pietricele). (Apoi, dacă Bogdan găseşte pe masă $7k$ pietricele şi ia 1, 2 sau 6 pietricele, atunci Alina ia 6, 2, respectiv 1 pietricele, iar dacă Bogdan găseşte pe masă $7k + 3$ pietricele şi ia 1, 2 sau 6 pietricele, Alina ia 2, 1, respectiv 1 pietricele.)
- Dacă Bogdan alege $m = 9$, Alina ia astfel încât să lase un număr de pietricele care dă unul din resturile 0, 3 sau 6 la împărţirea cu 10. Astel, prima ei mutare va fi să ia 2 pietricele. Dacă Bogdan urmează la mutare când pe masă sunt $10k$ pietricele, atunci: dacă Bogdan ia 1, 2 sau 9 pietricele, Alina ia 9, 2, respectiv 1 pietricele lăsând $10(k - 1)$ sau $10(k - 1) + 6$ pietricele. Dacă Bogdan urmează la mutare când pe masă sunt $10k + 3$ pietricele, atunci: dacă Bogdan ia 1, 2 sau 9 pietricele, Alina ia 2, 1, respectiv 1 pietricele lăsând $10k$ sau $10(k-1)+3$ pietricele. (Ultima situaţie este posibilă numai dacă $k \neq 0$.) Dacă Bogdan urmează la mutare când pe masă sunt $10k + 6$ pietricele, atunci: dacă Bogdan ia 1, 2 sau 9 pietricele, Alina ia 2, 1, respectiv 1 pietricele lăsând $10k + 3$ sau $10(k - 1) + 6$ pietricele. (Ultima situaţie este posibilă numai dacă $k \neq 0$.)

Aşadar, oricum ar alege Bogdan valoarea lui m, alegând $n = 2$ şi luând prima dată 2 pietricele din grămadă, Alina câştigă.

Problema 4. Fie ABC un triunghi şi E, F două puncte arbitrare pe laturile (AB), respectiv (AC). Cercul circumscris triunghiului AEF intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul M. Fie D simetricul lui M faţă de dreapta EF şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că $D \in BC$ dacă şi numai dacă O se află pe cercul circumscris triunghiului AEF.

Soluţie: Dacă $M = A$, adică cercurile sunt tangente în A, atunci omotetia de centru A care transformă cercul circumscris triunghiului AEF în cercul circumscris triunghiului ABC transformă segmentul $[EF]$ într-un segment paralel cu acesta, $[BC]$. Atunci $D \in BC$ dacă şi numai dacă $[EF]$ este linia mijlocie ceea ce este echivalent cu $AEOF$ inscriptibil.
Să presupunem în continuare că M se găseşte pe arcul mic AB. Atunci $m(\angle AEF) = m(\angle AMF) < m(\angle AMC) = m(\angle ABC)$, deci există $\{G\} = EF \cap BC$ şi $B \in (GC)$. Se ştie că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, AEF, EBG şi FCG au un punct comun, punctul lui Miquel al patrulaterului complet $BCFEAG$. Cum cercurile circumscrise triunghiurilor ABC şi AEF se taie a doua oară în M, rezultă că patrulaterele $MGBE$ şi $MFCG$ sunt inscriptibile. Atunci:
$D \in BC \Leftrightarrow \angle MGE \equiv \angle CGE \Leftrightarrow m(\angle AEM) = 2m(\angle ABM) = m(\angle AOM) \Leftrightarrow O$ aparţine cercului circumscris triunghiului AEF.



Faptul că patrulaterul $MGBE$ este inscriptibil poate fi justificat uşor şi fără a invoca punctul lui Miquel (demonstrând practic teorema):
$m(\angle EGB) = m(\angle EBC) - m(\angle BEG) = m(\angle ABC) - m(\angle AEF) = m(\angle AMC) - m(\angle AMF) = m(\angle FMC)$ deci patrulaterul $MFCG$ este inscriptibil.
Apoi, $m(\angle BMC) = m(\angle BAC) = m(\angle EAF) = m(\angle EMF)$, de unde rezultă că $m(\angle EGB) = m(\angle BME)$, deci $m(\angle BME) = m(\angle BGE)$, ceea ce arată că patrulaterul $GBEM$ este inscriptibil.