Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, CLASA A -IX-A-GORJ
21 februarie 2016

1) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1,2 \\ y+[z]+\{x\}=2,3 \\ z+[x]+\{y\}=3,5 \end{cases} \quad \text{unde } x,y,z\in\mathbf{R}.$$

2) Fie numerele reale strict pozitive a, b, c astfel încât $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}\le 1.$

Să se arate că $\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1}+\frac{1}{a+b+1}\ge 1.$ (G. M. 10/2015).

3) Se consideră triunghiul ABC și fie punctele M, N, P pe laturile [AB], [BC] respectiv [CA] astfel încât AM = 2MB, BN = 2NC, CP = 2PA. În planul triunghiului se consideră punctele D, E, F astfel încât $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\vec{0}.$

Să se demonstreze că triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate.

4) Fie ABC un triunghi și punctele M, N pe laturile [AB] respectiv [BC] astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$ și $\frac{BN}{NC}=\frac{n}{p}$, unde m,n,p sunt numere reale pozitive cu proprietatea $p^2=mn$. Notăm cu P intersecția dreptelor CM și AN. Arătați că $n\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+p\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.