INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a V-a

Problema 1.

a) Să se demonstreze că numărul $2017+2\cdot(1+2+3+...+2016)$ este pătrat perfect.

b) Să se determine numărul natural n pentru care se verifică egalitatea: $9^n+9^{n+1}=30\cdot3^{2015}$.

Problema 2.

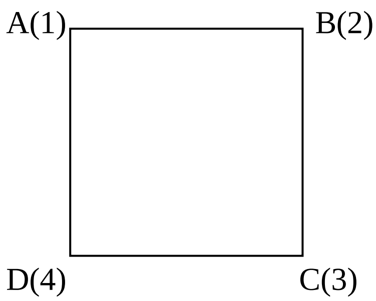
Să se determine numerele de forma $\overline{abcd}$, ştiind că:

$\overline{abcd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}-98\cdot\overline{ab}+2\cdot\overline{cd}=2085.$

Problema 3.

Se consideră pătratul din figura 1, unde în vârful A s-a pus numărul 1, în vârful B s-a pus numărul 2, în vârful C s-a pus numărul 3, iar în D s-a pus numărul 4. La fiecare etapă se alege o latură dintre cele patru şi se măresc ambele numere de la capetele ei cu câte 5 unităţi fiecare.

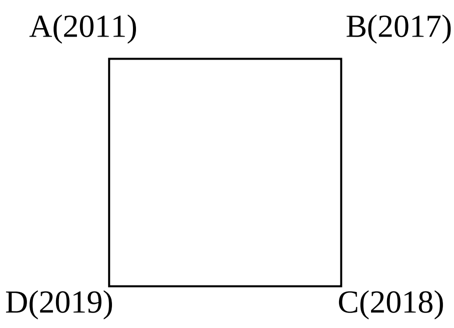
Figura 1.



a) Să se calculeze suma celor patru numere din vârfurile pătratului din figura 1, după 150 etape.

b) Să se explice dacă după un număr natural de etape se poate ajunge la figura 2.

Figura 2.



.

Problema 4.

Un număr natural se numeşte cub bipătratic dacă este cub perfect şi se scrie ca suma a două numere pătrate perfecte nenule diferite. Un număr natural se numeşte pătrat bicubic dacă este pătrat perfect şi se scrie ca suma a două numere cuburi perfecte nenule diferite.

a) Daţi un exemplu de un număr cub bipătratic şi un exemplu de număr pătrat bicubic.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de numere cuburi bipătrate şi o infinitate de numere pătrate bicubice.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 2 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $\left.\begin{array}{l}S=1+2+3+...+2015+2016\\ S=2016+2015+2014+...+2+1\end{array}\right\}\uparrow \overset{+}{\Longrightarrow} 2\cdot S=(2016+1)\cdot 2016 \Rightarrow$ $S=(2016+1)\cdot 2016:2$	**3p**
	$2017+2\cdot(1+2+3+...+2016)=2017+2\cdot 2017\cdot 2016:2=$ $2017+2017\cdot 2016=2017\cdot(2016+1)=$ 2017^2=pătrat perfect.	**2p**
	$9^n+9^{n+1}=30\cdot 3^{2015}$ $9^n+9^n\cdot 9=30\cdot 3^{2015}$ $9^n\cdot(1+9)=30\cdot 3^{2015}$ $9^n\cdot 10=30\cdot 3^{2015}$	**1p**
	$9^n=3\cdot 3^{2015}$ $9^n=3^{2016}$ $3^{2n}=3^{2016}$ $2n=2016$ $n=1008.$	**1p**

2.	$\overline{abcd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}-98\cdot\overline{ab}+2\cdot\overline{cd}=2085$ $100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}-98\cdot\overline{ab}+2\cdot\overline{cd}=2085\Rightarrow$ $2\cdot\overline{ab}+3\cdot\overline{cd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}=2085$ $2\cdot\overline{ab}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}+3\cdot\overline{cd}+6=2085+6$ $\overline{ab}\cdot\left(2+\overline{cd}\right)+3\cdot\left(2+\overline{cd}\right)=2091$ $\left(\overline{ab}+3\right)\cdot\left(2+\overline{cd}\right)=2091$ $2091=51\cdot 41$ $\left(\overline{ab}+3\right)\cdot\left(2+\overline{cd}\right)=51\cdot 41$ I. $\begin{cases}\overline{ab}+3=51\\ 2+\overline{cd}=41\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{ab}=48\\ \overline{cd}=39\end{cases}\Rightarrow\ \overline{abcd}=4839$ 2. $\begin{cases}\overline{ab}+3=41\\ 2+\overline{cd}=51\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{ab}=38\\ \overline{cd}=49\end{cases}\Rightarrow\overline{abcd}=3849.$	**2p** **1p** **1p** **1p** **1p** 1p
3.	*a*) Fiecare "etapă" măreşte suma totală a celor patru vârfuri cu 10, deci după 150 etape, suma este 1510.	**3p**
	b) Metoda 1. Suma iniţială din figura 1 este 10. După fiecare etapă, suma numerelor din cele 4 vârfuri se măreşte cu 10, astfel încât după *n* etape, suma devine $10+10\cdot n=10\cdot(n+1)=M_{10}$. În figura 2, suma numerelor din cele 4 vârfuri este $8065\neq M_{10}\Rightarrow$ după un anumit număr de etape nu se poate ajunge la figura 2. Metoda 2. Orice "etapă" măreşte suma numerelor corespunzătoare punctelor A şi C cu câte 5 unităţi, notată cu S_{AC} şi suma numerelor corespunzătoate punctelor B şi D tot cu câte 5 unităţi, notată cu S_{BD}. Diferenţa iniţială $S_{BD}-S_{AC}=2,$ această diferenţă rămâne neschimbată după fiecare etapă. (diferenţa dintre sumele pe diagonale este aceeaşi 2, după fiecare etapă). În figura 2 avem: $S_{BD}-S_{AC}=7,$ ceea ce nu este posibil, deci nu se poate.	**2p** **1p** 1p
4.	a) $5^3=5^2+10^2\Rightarrow 125$ este cub bipătratic; $3^2=1^3+2^3\Rightarrow 9$ este pătrat bicubic;	**2p** **1p**
	b)Fie $a,b\in\mathbb{N}^*, a\neq b$ şi $a^2+b^2=k, k\in\mathbb{N}^*$; $a^2+b^2=k\,/\cdot k^2\Rightarrow a^2\cdot k^2+b^2\cdot k^2=k^3\Rightarrow(a\cdot k)^2+(b\cdot k)^2=k^3\Rightarrow k^3$este cub bipătratic cu condiţia ca numărul $k\in\mathbb{N}^*$ să fie suma a două pătrate perfecte, nenule, diferite. Cum $a,b\in\mathbb{N}^*, a\neq b$ şi oarecare $\Rightarrow$ există $k=a^2+b^2, k\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea $k^3=(a\cdot k)^2+(b\cdot k)^2\Rightarrow$ există o infinitate de numere cuburi bipătrate.	**2p**
	Fie $a, b\in\mathbb{N}^*,\ a\neq b$ şi $a^3+b^3=t, t\in\mathbb{N}^*$; $a^3+b^3=t\,/\cdot t^3\Rightarrow(a\cdot t)^3+(b\cdot t)^3=\left(t^2\right)^2\Rightarrow t^4$ este pătrat bicubic cu condiţia ca numărul *t* să fie suma a două cuburi perfecte, nenule, diferite.	**2p**