OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ – 26.02.2016

Clasa a VI-a

-subiect-

1) Să se arate că:

a) numărul $A = 5 + 5^2 + 5^3$ este divizibil cu 31;

b) numărul $B = 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2017}$ este divizibil cu 775.

2) Fie *a*, *b*, *c* numere raţionale pozitive, astfel încât $\frac{7}{a+11} + \frac{21}{3b+39} + \frac{35}{5c+85} + \frac{49}{7d+133} = 1,75$.

Să se arate că numărul $\frac{a+7}{a+11} + \frac{b+9}{b+13} + \frac{c+13}{c+17} + \frac{d+15}{d+19}$ este natural.

3) Unghiurile *AOB* şi *BOC* sunt adiacente suplementare şi $m(\sphericalangle AOB) = 150^0$. În semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta AC şi punctul B se iau semidreptele [OD astfel încât $m(\sphericalangle DOB) = 120^0$, [OE astfel încât $m(\sphericalangle EOC) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC)$ şi [OF astfel încât $\sphericalangle FOD \equiv \sphericalangle EOC$. Calculaţi măsurile unghiurilor *EOB*, *DOC* şi *BOF*.

Supliment GM, noiembrie 2015

NOTĂ:

- Timp de lucru 2 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ – 26.02.2016
Clasa a VI-a
-barem-

1) Să se arate că:

a) numărul $A=5+5^2+5^3$ este divizibil cu 31;

b) numărul $B=5^2+5^3+\ldots+5^{2017}$ este divizibil cu 775.

Soluţie:

a) $A=5\cdot\left(1+5+5^2\right)$ ……………………………………………………………………………1p

$A=5\cdot 31 \Rightarrow A\vdots 31$ ……………………………………………………………………………..1p

b) $B=5\cdot\left(5+5^2+\ldots+5^{2016}\right)$ ……………………………………………………………………1p

în paranteză putem grupa câte trei termeni, 2016 este divizibil cu 3 ……………….…………...1p

obţinem, $B=5\cdot\left[5\cdot\left(1+5+5^2\right)+5^4\cdot\left(1+5+5^2\right)+\ldots+5^{2014}\cdot\left(1+5+5^2\right)\right]$ …………………………1p

din factor comun $\Rightarrow B=5^2\cdot\left(1+5+5^2\right)\cdot\left(1+5^3+\ldots+5^{2013}\right)$ ……………………………………1p

adică $B=25\cdot 31\cdot\left(1+5^3+\ldots+5^{2013}\right)=775\cdot\left(1+5^3+\ldots+5^{2013}\right)$ ………………………………1p

2) Fie *a*, *b*, *c* numere raţionale pozitive, astfel încât $\frac{7}{a+11}+\frac{21}{3b+39}+\frac{35}{5c+85}+\frac{49}{7d+133}=1,75$.

Să se arate că numărul $\frac{a+7}{a+11}+\frac{b+9}{b+13}+\frac{c+13}{c+17}+\frac{d+15}{d+19}$ este natural.

Soluţie:

$\Rightarrow \frac{7}{a+11}+\frac{7}{b+13}+\frac{7}{c+17}+\frac{7}{d+19}=\frac{7}{4}$, $\frac{1}{a+11}+\frac{1}{b+13}+\frac{1}{c+17}+\frac{1}{d+19}=\frac{1}{4}$ ……………..…...1p

$\frac{a+7}{a+11}=\frac{a+11-4}{a+11}=\frac{a+11}{a+11}-\frac{4}{a+11}=1-\frac{4}{a+11}$ ……………………………………………..1p

analog $\frac{b+9}{b+13}=1-\frac{4}{b+13}$, $\frac{c+13}{c+17}=1-\frac{4}{c+17}$ şi $\frac{d+15}{d+19}=1-\frac{4}{d+19}$ ……..……..………….……...3p

obţinem $\frac{a+7}{a+11}+\frac{b+9}{b+13}+\frac{c+13}{c+17}+\frac{d+15}{d+19}=4-4\cdot\left(\frac{1}{a+11}+\frac{1}{b+13}+\frac{1}{c+17}+\frac{1}{d+19}\right)$ ……..……..1p

deci $\frac{a+7}{a+11}+\frac{b+9}{b+13}+\frac{c+13}{c+17}+\frac{d+15}{d+19}=3\in\mathbb{N}$ …………………………………………..……..1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

3) Unghiurile AOB şi BOC sunt adiacente suplementare şi $m(\sphericalangle AOB)=150^0$. În semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta AC şi punctul B se iau semidreptele [OD astfel încât $m(\sphericalangle DOB)=120^0$, [OE astfel încât $m(\sphericalangle EOC)=2\cdot m(\sphericalangle BOC)$ şi [OF astfel încât $\sphericalangle FOD\equiv\sphericalangle EOC$. Calculaţi măsurile unghiurilor *EOB*, *DOC* şi *BOF*.

Supliment GM, noiembrie 2015

Soluţie:

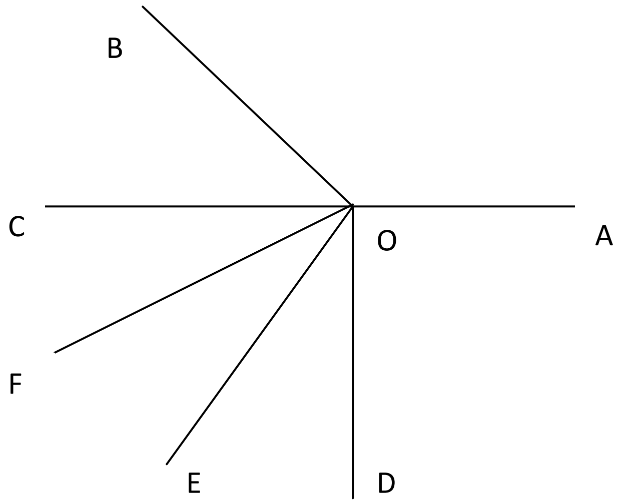
$m(\sphericalangle AOC)=180^0 \Rightarrow m(\sphericalangle BOC)=30^0$ ……………………………………………1p

$\Rightarrow m(\sphericalangle DOC)=90^0$ ……………………………………………………1p

$\Rightarrow m(\sphericalangle EOC)=m(\sphericalangle FOD)=60^0$ şi $m(\sphericalangle EOD)=30^0$ ……………………………1p

desen caz 1 ………………………………………………………………………………1p

$\Rightarrow m(\sphericalangle FOC)=30^0$ şi $m(\sphericalangle BOF)=60^0$ ………………………………………………1p



desen caz 2 ………………………………………………………………………………1p

$\Rightarrow m(\sphericalangle FOC)=150^0$ şi $m(\sphericalangle BOF)=180^0$ ……………………………………………1p