Inspectoratul Şcolar Judeţean Mehedinţi

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a X-a

SUBIECTUL I

Fie $z_i \in C^*$, $i = \overline{1, 2013}$, $|z_i| = r$, $\forall\ i = \overline{1, 2013}$. Arătaţi că:

$$z = (z_1 + z_2 + ... + z_{2013})\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{2013}}\right) \in \mathbf{R}.$$

SUBIECTUL II

Considerăm numerele reale $a, b, x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ astfel încât $b^n \le x_1 x_2 .... x_n$. Să se arate că $(\log_a b)^n \ge \log_a x_1 \log_a x_2 .... \log_a x_n$, $\forall n \in IN, n \ge 2$.

SUBIECTUL III

Pe laturile $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ ale unui poligon regulat de latură a se consideră punctele $B_1, B_2, ..., B_n$, respectiv, în acelaşi sens şi astfel încât $[A_1B_1] \equiv [A_2B_2] \equiv ... \equiv [A_nB_n] = x,\quad x \in (0, a)$. Să se determine x astfel încât aria poligonului $B_1B_2...B_n$ să fie minimă

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \to [-2, 2]$ dată de formula $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

a)Să se determine constantele *a* şi *b* astfel încât $f(x) = a\cos(x + b)$.
b)Să se reprezinte grafic funcţia *f*.
c)Să se arate că *f* este inversabilă .

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a X-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

SUBIECTUL I

$z_i \cdot \bar{z_i} = \lvert z_i \rvert^2 = r^2 \Rightarrow z_i = \dfrac{r^2}{\bar{z_i}}, \forall\, i = \overline{1, 2013}$	2p
Avem $\bar{z} = \left(\bar{z_1} + \bar{z_2} + ... + \overline{z_{2013}}\right)\left(\dfrac{1}{\bar{z_1}} + \dfrac{1}{\bar{z_2}} + ... + \dfrac{1}{\overline{z_{2013}}}\right) =$	2p
$= \left(\dfrac{r^2}{z_1} + \dfrac{r^2}{z_2} + ... + \dfrac{r^2}{z_{2013}}\right)\left(\dfrac{z_1}{r^2} + \dfrac{z_2}{r^2} + ... + \dfrac{z_{2013}}{r^2}\right) =$	1p
$= \left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + ... + \dfrac{1}{z_{2013}}\right)\left(z_1 + z_2 + ... + z_{2013}\right) = z$.	1p
Deci, $\bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbf{R}$.	1p

SUBIECTUL II

Se aplică logaritmul cu baza a subunitară şi se obține:	1p
$n\log_a b \geq \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_n$	2p
Toti logaritmii sunt pozitivi!	
Se aplică inegalitatea mediilor aritmetică şi geometrică şi se obține	
$n\log_a b \geq \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_n \geq n\sqrt[n]{\log_a x_1 \log_a x_2 .... \log_a x_n}$	2p
Simplificăm cu n şi ridicăm la puterea n.	2p

SUBIECTUL III

Notăm $B_1B_2 = l_n$. În $\Delta B_1A_2B_2$ avem $B_1A_2 = a - x; A_2B_2 = x$, $m\left(B_1\hat{A_2}B_2\right) = \dfrac{\pi(n-2)}{n}$.	
$l_n^2 = 4x^2\sin^2\dfrac{\pi}{n} - 4ax\sin^2\dfrac{\pi}{n} + a^2$.	
Dacă OM este apotema poligonului $OM = \dfrac{l_n}{2}ctg\dfrac{\pi}{n}$.	2p
Fie $f:(0,a) \to R,\ f(x) = A_{[B_1B_2...B_n]}$	1p
$f(x) = n\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}x^2 - na\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}x + \dfrac{a^2n}{4}ctg\dfrac{\pi}{n}$	
Adică o funcție de gradul al doilea care admite minim pentru	2p
$x = \dfrac{na\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}}{2n\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}} = \dfrac{a}{2}$.	2p

SUBIECTUL IV

a)	$f(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$, deci a=2 şi $b = -\frac{\pi}{3}$	**2p**
b)	$A\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$, $C\left(\frac{4\pi}{3}, -2\right)$ sunt cele trei puncte remarcabile	**2p**
c)	Demonstrarea injectivitatii Demonstrarea surjectivitatii Finalizare	**1p** **1p** **1p**