Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a VII-a

1. a) Calculaţi: $S = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}} + ... + \frac{\sqrt{1008}-\sqrt{1007}}{\sqrt{1007\cdot 1008}}$.

   b) Demonstraţi că $\left(S^2 + \frac{2}{\sqrt{2016}}\right) \in Q$.

prof. Delia Olari, Şcopala Gimnazială „Vasile Lucaciu" Apa

2. Se consideră numerele reale a,b şi c cu $0 \le a \le 2016$, $0 \le b \le 2016$, $0 \le c \le 2016$. Demonstraţi că $ab + ac + bc + 2016^2 \ge 2016\,(a + b + c)$.

prof. Petru Braica, Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil"

3. De aceeaşi parte a segmentului $[AB]$ se construiesc triunghiul echilateral ABC şi triunghiul dreptunghic isoscel ABD, $m(\sphericalangle ABD) = 90^\circ$. Notăm cu E simetricul lui B faţă de DC şi cu F al patrulea vârf al paralelogramului care mai conţine vârfurile A, D şi E. Arătaţi că $FC \perp BD$.

prof. Adrian Bud, Liceul Teoretic Negrești Oaș

4. Se consideră triunghiul ΔABC obtuzunghic în A iar punctele D, $E \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ACB)$ şi $m(\sphericalangle EAC) = (\sphericalangle CBA)$. Demonstraţi că picioarele bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle BDA$ şi $\sphericalangle CEA$ în ΔABD respectiv în ΔAEC împreună cu punctul A formează un triunghi isoscel.

prof. Petru Braica, Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SATU MARE

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

BAREM de corectare

1. a)	$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{1008}-\sqrt{1007}}{\sqrt{1007\cdot 1008}}=\frac{1}{\sqrt{1007}}-\frac{1}{\sqrt{1008}}$	**2p**
	$S=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1007}}-\frac{1}{\sqrt{1008}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1008}}$	**2p**
1. b)	$S^2=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2016}}+\frac{1}{1008}$	**2p**
	$S^2+\frac{2}{\sqrt{2016}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1008}\in Q$	**1p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2.	$2016-a\geq 0$ $2016-b\geq 0$ $2016-c\geq 0$ $(2016-a)(2016-b)(2016-c)\geq 0$	**1p**
	$(2016^2-2016(a+b)+a\cdot b)(2016-c)\geq 0$	**1p**
	$2016^3-2016^2(a+b+c)+2016(ab+ac+bc)-abc\geq 0$	**2p**
	$2016^3-2016^2(a+b+c)+2016(ab+ac+bc)\geq abc\geq 0$	**1p**
	$2016\left(2016^2-2016(a+b+c)+(ab+ac+bc)\right)\geq 0$	**1p**
	$2016^2+(ab+ac+bc)\geq 2016(a+b+c)$	**1p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3.	Din ipoteza avem $[BC]\equiv[BD]$. Deoarece E este simetricul lui B față de $[DC]\Longrightarrow$ $[EB]$ se găsește pe mediatoarea lui $[DC]\Longrightarrow$ și $\Delta ECB\equiv\Delta EDB(L.U.L.)\Longrightarrow EC=CB=BD=DE$ Deci CBDE este romb	**3p**
	Din $EC\parallel DB\Longrightarrow EC\perp AB$ Din $FA\parallel ED\parallel CB\Longrightarrow FABC$ paralelogram chiar romb	**2p**
	$\left.\begin{array}{l}FC\parallel AB\\ EC\perp AB\end{array}\right\}\Longrightarrow FC\perp EC\Longrightarrow FC\perp BD$	**2p**
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

4.	$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle EAC \\ \sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ECA \equiv \sphericalangle BCA\end{array}\right\} \Rightarrow (U.U.)\Delta ADB \sim \Delta CAB \sim \Delta CEA \Rightarrow$ $\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{AB} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{AB}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{AC}$	**2p**
	Din teorema bisectoarei în triunghiurile ΔABD şi în $\Delta AEC \Rightarrow \frac{AX}{XB} = \frac{AD}{DB}(= \frac{AC}{AB})$ $\frac{AY}{YC} = \frac{AE}{EC}(= \frac{AB}{AC})$, unde X şi Y sunt picioarele bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle ADB$, respectiv $\sphericalangle AEC$	**2p**
	Din proporţii derivate avem $\frac{AX}{AB} = \frac{AC}{AB+AC} \Rightarrow AX = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}$ (1) $\frac{AY}{AC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow AY = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}$ (2) d= 9	**2p**
	Din (1) şi (2) $\Rightarrow \Delta AXY$ este isoscel	**1p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**