



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
19.02.2016

Subiectul I.(7 puncte)

Fie $a \in (0,4)$, a fixat. Determinați z din C știind că $|z| = \left| \frac{a}{z} \right| = |z - a|$.

Prof. Buju Aura, Liceul Teoretic „Petru Maior” Gherla

Subiectul II. (7 puncte)

Demonstrați că

$$\log_{2016}^{2016} \sqrt{1 + \frac{a_2}{a_1}} + \log_{2016}^{2016} \sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2}} + \dots + \log_{2016}^{2016} \sqrt{1 + \frac{a_1}{a_{2016}}} \geq \frac{1}{5 + \log_2 63},$$

pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ numere reale strict pozitive.

Prof. Faiciuc Marilena-Anca Colegiul Național Pedagogic “Gh. Lazăr” Cluj-Napoca

Subiectul III. (7 puncte)

a) Să se demonstreze că $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$, $a, b \geq 0$

b) Să se arate că pentru $\forall x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, are loc inegalitatea:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy})^2 + (\operatorname{tgy} + \operatorname{tgz})^2 + (\operatorname{tgz} + \operatorname{tg}x)^2 + \operatorname{tg}x + \operatorname{tgy} + \operatorname{tgz} \geq \\ & \geq 2(\operatorname{tg}x\sqrt{\operatorname{tgy}} + \operatorname{tgy}\sqrt{\operatorname{tg}x} + \operatorname{tgy}\sqrt{\operatorname{tgz}} + \operatorname{tgz}\sqrt{\operatorname{tgy}} + \operatorname{tgz}\sqrt{\operatorname{tg}x} + \operatorname{tg}x\sqrt{\operatorname{tgz}}) \end{aligned}$$

Prof. Jecan Eugen, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Subiectul IV. (7 puncte)

a) Să se arate că $\forall x > 1$, are loc inegalitatea: $2^x \cdot \sqrt{4^x - 1} + 4^x \cdot \sqrt{2^x - 1} < 8^x$.

Prof. Camelia Maria Magdaș Colegiul Național “Andrei Mureșanu” Dej

b) Să se determine funcțiile bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\forall x, y \in \mathbb{R}$ are loc relația:
 $f(2x + f(x) + 3f(y)) = f(3x) + f(3y)$.

*Elev Paul Helmer, clasa XII-a, Liceul Teoretic Avram Iancu Cluj-Napoca
(component al lotului județean la ONM)*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!