OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a VII-a

Subiectul I

Se consideră numerele reale:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}} \quad \text{si}$$
$$y=2+2^2+2^3+....+2^{2014}$$

a) Să se arate că $x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$

b) Să se arate că numărul $n=2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-1\right)$ este pătrat perfect.

Subiectul II

Demonstraţi că nu există $x,y,z\in Z$ astfel încât

$$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=-1$$

Subiectul III

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului (AC) iar (CE este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, $E\in(AB)$. Dacă $BD\cap CE=\{P\}$, să se arate că

$$\frac{PC}{PE}-2\cdot\frac{PD}{PB}=1$$

Subiectul IV

Se consideră pătratul ABCD în care punctele G şi H sunt mijloacele laturilor DC şi respectiv BC. Dreptele AG şi AH intersectează diagonala BD în punctele E respectiv F.

a) Arătaţi că patrulaterul EFHG este trapez isoscel.

b) Determinaţi raportul dintre aria trapezului EFHG şi aria pătratului ABCD.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul efectiv de lucru este 3 ore.

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA a VII-a

Bareme de corectare

Subiectul I

Se consideră numerele reale:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}} \quad \text{si}$$
$$y=2+2^2+2^3+....+2^{2014}$$

c) Să se arate că $x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$

d) Să se arate că numărul $n=2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-1\right)$ este pătrat perfect.

Rezolvare

a) $x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}}$

$\sqrt{2}x=\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}}+\sqrt{2^{2015}}$

$\left(\sqrt{2}-1\right)x=\sqrt{2^{2015}}-\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2^{2014}}-1\right)\Rightarrow x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$ ……….3p

b) $y=2\left(2^{2014}-1\right)$ …………………………………………………………………………..1p

$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\left(2^{1007}+1\right)}{\sqrt{2}+1}\Rightarrow n=2\left(2^{1007}+1-1\right)\Rightarrow n=\left(2^{504}\right)^2$ ……..…………………………3p

Subiectul II

Demonstraţi că nu există $x,y,z\in Z$ astfel încât

$$xy\left(x-y\right)+yz\left(y-z\right)+zx\left(z-x\right)=-1$$

Rezolvare

Pentru orice discutie bazata pe paritatea numerelor……………………………………………**1p**

Caz I : daca x, y si z au aceeasi paritate atunci x-y, y-z, z-x sunt pare si deci suma este numar par . Contradictie!...**2p**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Caz II: daca doua dintre numerele x, y, z sunt pare atunci toti cei trei termeni ai sumei contin cel putin un factor par si deci suma este numar par. Contradictie!.....................................**2p**

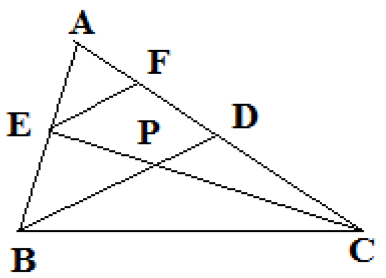
Caz III: daca un singur numar este par atunci celelalte doua sunt impare si diferenta lor este para deci toti termenii sumei sunt pari si intreaga suma este para. Contradictie!...................**2p**

Subiectul III

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului (AC) iar (CE este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, $E \in (AB)$. Dacă $BD \cap CE = \{P\}$, să se arate că

$$\frac{PC}{PE} - 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 1$$

Rezolvare



$$\triangle BCD \overset{teorema.bisectoarei}{\Rightarrow} \frac{PD}{PB} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 2 \cdot \frac{CD}{CB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 1 + \frac{AC}{BC}$$ …………..**2p**

Construim $EF \parallel BD, F \in AC$

$$\triangle CEF, EF \parallel PD \overset{teorema.Thales}{\Rightarrow} \frac{PC}{PE} = \frac{DC}{DF}$$ ………………………………………………………..**1p**

$$AD = DC \Rightarrow \frac{PC}{PE} = \frac{AD}{DF}$$

$$\triangle ABD \overset{t.Thales}{\Rightarrow} \frac{AD}{DF} = \frac{AB}{EB}$$ …...………………………………………………………………..**1p**

$$\triangle ABC \overset{t.bisectoarei}{\Rightarrow} \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AE + EB}{EB} = \frac{AC + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{AC}{BC} + 1$$ …………………….**2p**

Finalizare : $1 + 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 1 + \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{EB} = \frac{AD}{DF} = \frac{PC}{PE}$ ………………………………………**1p**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

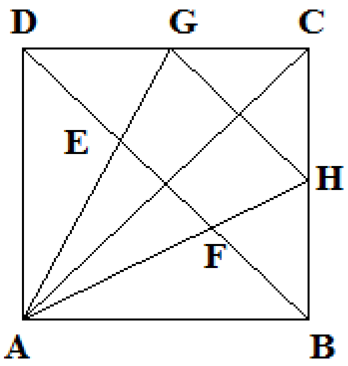
Subiectul IV

Se consideră pătratul ABCD în care punctele G şi H sunt mijloacele laturilor DC şi respectiv BC. Dreptele AG şi AH intersectează diagonala BD în punctele E respectiv F.

c) Arătaţi că patrulaterul EFHG este trapez isoscel.

d) Determinaţi raportul dintre aria trapezului EFHG şi aria pătratului ABCD.

Rezolvare



a) GH linie mijlocie in $\triangle BCD \Rightarrow GH \parallel DB \Rightarrow GH \parallel EF$ …………………………………..1p

$\triangle AHB \equiv \triangle AGD \Rightarrow AH = AG \Rightarrow \triangle AHG$ este isoscel $\Rightarrow \angle AHG \equiv \angle AGH$ ……………….1p

$\Rightarrow EFHG$ trapez isoscel

b) Fie $\begin{array}{l} AC \cap BD = \{O\} \\ OC \cap GH = \{P\} \end{array}$

Notez lungimea segmentului OC cu ***a***

$CO \perp BD, GH \parallel BD \Rightarrow CO \perp GH \Rightarrow$ OP este inaltimea trapezului

GH linie mijlocie in $\triangle BCD \Rightarrow P$ este mijlocul segmentului OC$\Rightarrow$ OP = $\frac{a}{2}$ ………….1p

$GH = \frac{DB}{2} \Rightarrow GH = a$

$\left.\begin{array}{l} \triangle ADC \\ AG, DO - mediane \end{array}\right. \Rightarrow$E = centrul de greutate $\Rightarrow$EO= $\frac{a}{3} \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$ ………………2p

$$A_{EFHG} = \frac{\left(a + \frac{2a}{3}\right)\frac{a}{2}}{2} \Rightarrow A_{EFHG} = \frac{5a^2}{12}, \quad A_{ABCD} = 4 \cdot A_{AOB} = 4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2$$

$\frac{A_{EFHG}}{A_{ABCD}} = \frac{5}{24}$ ……………………………………………..…………………………………..2p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro