Olimpiada naţională de matematică, etapa locală, 2015
clasa a XI-a

1. Se dă mulţimea de matrice

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists\, k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \text{ astfel încât } X^k = O_2\}.$$

a. Demonstraţi că dacă $A \in M$, atunci $\det(I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2015}) = 1$.
b. Demonstraţi că matricea I_2 nu se poate scrie ca sumă finită de matrice din M.

2. a. Demonstraţi că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 nu poate fi egal cu permutarea identică din S_3.
b. Demonstraţi că există o infinitate de perechi de matrice (X, Y) din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $XY \neq YX$ şi $X^2 = Y^2 = I_2$.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit recurent astfel:

$$x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{a x_n^{a-1}},$$

unde $a \in \mathbb{N} - \{0\}$.
a. Demonstraţi că şirul are limită şi calculaţi această limită.
b. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.
c. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^a}{n}$.

4. Se dau numerele $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a+b+c = 3$. Determinaţi valorile extreme ale expresiei $2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 7 puncte. Timp de lucru, trei ore.

Barem de corectare

1. Se dă mulţimea de matrice

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists\, k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \text{ astfel încât } X^k = O_2\}.$$

a. Demonstraţi că dacă $A \in M$, atunci $\det(I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2\,015}) = 1$.
b. Demonstraţi că matricea I_2 nu se poate scrie ca sumă finită de matrice din M.

Barem de corectare.
a. (4 p) $X^k = O_2 \Rightarrow \det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = tX$, unde $t = \mathrm{tr}(X)$ (1 punct); $X^k = t^{k-1}X = O_2 \Rightarrow X = O_2$ sau $t = 0$; în anbele cazuri, avem $X^2 = O_2$ (1 punct); verificare pentru $A = O_2$ (1 punct); pentru $A \neq O_2$, avem $\det(I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2\,015}) = \det(I_2 + A) = 1$ (1 punct).
b. (3 p) Reducere la absurd: dacă $I_2 = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, ar trebui ca $\mathrm{tr}(I_2) = \mathrm{tr}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \Leftrightarrow 2 = 0$, contradicţie.

2. a. Demonstraţi că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 nu poate fi egal cu permutarea identică din S_3.
b. Demonstraţi că există o infinitate de perechi de matrice (X, Y) din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $XY \neq YX$ şi $X^2 = Y^2 = I_2$.

Barem de corectare.
a. (3 p) Scrierea tuturor permutărilor din S_3 (1 punct); calcularea numărului total de inversiuni ale acestora ąi concluzia că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este o permutare impară (1 punct); permutarea identică este pară (1 punct).
b. (4 p) $X^2 = \mathrm{tr}(X) \cdot X - \det(X) \cdot I_2$ (1 punct); căutarea unor matrice cu urma egală cu 0 şi determinatul egal cu -1 (1 punct); finalizare $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ 1-b & -b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ (1 punct); verificarea că $AB \neq BA$ (1 punct). Pentru găsirea unor matrice particulare care să verifice condiţiile problemei, se va acorda 1 punct.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit recurent astfel:

$$x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{a x_n^{a-1}},$$

unde $a \in \mathbb{N} - \{0\}$.
a. Demonstraţi că şirul are limită şi calculaţi această limită.
b. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.
c. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^a}{n}$.

Barem de corectare.
a. (3 p) Şirul este cu termeni pozitivi prin definiţie (1 punct) şi $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{a x_n^{a-1}} > 0, \forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, deci este strict crescător; prin urmare are limită (1 punct); limita este ∞ (1 punct).
b. (2 p) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{a x_n^a}$ (1 punct); limita este 1 (1 punct).
c. (2 p) Conform teoremei Cesaro-Stolz, este suficient să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}^a - x_n^a) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1}^{a-1} + x_{n+1}^{a-2}x_n + \ldots + x_n^{a-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}^{a-1}+x_{n+1}^{a-2}x_n+\ldots+x_n^{a-1})}{a x_n^{a-1}} = \frac{1}{a} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a-1} + \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a-2} + \ldots + 1\right) = 1.$

4. Se dau numerele $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a + b + c = 3$. Determinaţi valorile extreme ale expresiei

$2(a^2+b^2+c^2)+3abc$.

Barem de corectare.

Demonstrăm că $9 \leq 2(a^2+b^2+c^2)+3abc \leq 18$, cu egalitate la stânga pentru $a=b=c=1$, iar la dreapta pentru $a=3$, $b=c=0$, sau $b=3$, $a=c=0$, sau $c=3$, $a=b=0$.

Inegalitatea din dreapta se scrie $2(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)+3abc \leq 18 \Leftrightarrow 3abc \leq 4(ab+bc+ca)$, inegalitate adevărată, deoarece $a,b,c \in [0,3]$ şi $3abc = abc+abc+abc \leq 3ab+3bc+3ac \leq 4(ab+bc+ca)$ (3 puncte). Egalitatea are loc pentru $ab+bc+ca=0$, deci $a=b=0$, sau $b=c=0$, sau $c=a=0$, cazul $a=b=c=0$ fiind exclus de condiţia din enunţ (1 punct).

Inegalitatea din stânga se scrie $2(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)+3abc \geq 9 \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-3abc \leq 9$. Pentru a demonstra aceasta, presupunem că $a \leq b \leq c$; în acest caz, rezultă $a \leq 1$ şi inegalitatea de demonstrat devine $4a(b+c)+4bc-3abc \leq 9 \Leftrightarrow 4a(3-a)+bc(4-3a) \leq 9$. Deoarece $4-3a \geq 0$, avem $bc(4-3a) \leq \frac{(b+c)^2(4-3a)}{4} = \frac{(3-a)^2(4-3a)}{4}$, iar inegalitatea de demonstrat devine $4a(3-a)+\frac{(3-a)^2(4-3a)}{4} \leq 9$, echivalentă, după câteva calcule, cu $3a(a-1)^2 \geq 0$ (2 puncte). Egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$ (1 punct).