OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$. Dacă suma tuturor elementelor matricei $A \cdot A^t$ este zero, demonstrați că $\det(A) = 0$.

2. Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $A^3 = A + I_n$, demonstrați că $\det(A) > 0$.

3. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit astfel $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k - 1}$.

4. Demonstrați că dacă o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică și are limită la $+\infty$, atunci ea este o funcție constantă.

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Dan Popoiu, C.N. „Unirea” Focșani

NOTĂ: **Timp de lucru: 3 ore.**
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN VRANCEA

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

1. Calcul $A\cdot A^t$ 3p

Suma elementelor pe fiecare coloană în matricea A este nulă....................3p

$\det(A)=0$ 1p

2. $\det(A^2+A+I_n)>0$ 1p

$\det(A-I_n)\cdot\det(A)>0$ 2p

$\det(A+I_n)>0$ 2p

$\det(A)>0$ 2p

3. $x_n=1+\frac{n(n-1)}{2}$ 3p

$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k-1}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 3p

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k-1}=2$ 1p

4. Există $\alpha\neq\beta$ astfel ca $f(\alpha)\neq f(\beta)$ 2p

$f(x_n)=f(\alpha+nT)=f(\alpha)\to f(\alpha)$ 2p

$f(y_n)=f(\beta+nT)=f(\beta)\to f(\beta)$ 2p

Finalizare....................1p

NOTĂ. **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**