Olimpiada Naţională de Matematică 2016

Etapa locală – Iaşi, 1 februarie 2016

CLASA A A X-A

Problema 1.

Determinaţi numerele complexe z, de modul 1, pentru care $z^3 + z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$ şi apoi calculaţi suma acestora şi aria poligonului convex având ca vârfuri imaginile în plan ale acestora.

Gazeta Matematică, nr.11/2015

Problema 2.

Să se arate că oricare ar fi $x, y \in (0,1)$, $x + y = 1$ avem:

a) $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{1}{2}$

b) $x \ln x + y \ln y \geq \frac{\ln x + \ln y}{2}$

Problema 3.

Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi ecuaţia $x^n + ax + 1 = 0$. Să se arate că orice soluţie $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ a ecuaţiei, satisface: $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$

Problema 4.

a) **Demonstraţi că:** $\sqrt[k]{k!} \leq \frac{k}{2}, (\forall) k \in N, k \geq 6.$

b) **Demonstraţi că, dacă** $n \in N, n \geq 6$, **atunci:** $1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n!} \leq \frac{6 \cdot n!}{2^n}.$

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A X-A

Problema 1.

Soluție și barem

$\bar{z} = \frac{1}{z}$ 1p

$z^3 + z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 = \overline{z^3 + z^2 + z + 1} \Leftrightarrow \quad (z^2+1)(z+1) = (\overline{z^2+1})(\overline{z+1})$

$\Leftrightarrow (z^2+1)(z+1) = \left(\frac{1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{z^2}+1\right) \Leftrightarrow (z+1)(z^2+1)\left(1-\frac{1}{z^3}\right) = 0$ 2p

$z_1 = -1, z_{2,3} = \pm i, z_4 = 1, z_{5,6} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$, de unde suma este -1..2p

Se reprezintă în planul complex punctele de afixe $z_1, \ldots\ldots, z_6$, după care se obține aria

$S = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 2p

Problema 2.

Soluție și barem

a) Din $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$ rezultă $\frac{\ln x + \ln y}{2} \le \ln\frac{1}{2}$ 2p

b) Inegalitatea se mai scrie

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x + \left(y-\frac{1}{2}\right)\ln y \ge 0$$

Dar din $x+y=1$ rezultă $x-\frac{1}{2} = -\left(y-\frac{1}{2}\right)$ și inegalitatea de mai sus devine

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{x}{y} \ge 0$ (*)...1p

Dacă $\frac{1}{2} \le x < 1 \to 0 < y \le \frac{1}{2}$ deci $\frac{x}{y} \ge 1 \to \ln\frac{x}{y} \ge 0$ deci se verifică (*)...2p

Dacă $0 < x \le \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \le y < 1$ deci $\frac{x}{y} \le 1 \to \ln\frac{x}{y} \le 0$ deci se verifică (*)..2p

Problema 3.

Soluţie şi barem

Dacă $z = r(\cos t + i\sin t)$, $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

este o soluţie a ecuaţiei, atunci $r^n(\cos nt + i\sin nt) + ar(\cos t + i\sin t) + 1 = 0$, de unde obţinem

$r^n \cos nt + ar\cos t + 1 = 0, r^n \sin nt + ar\sin t = 0$ 2p

Eliminând ***ar*** din cele doua relaţii obţinem $r^n \sin(n-1)t - \sin t = 0$ 2p

$r = \sqrt[n]{\left|\dfrac{\sin t}{\sin(n-1)t}\right|}$ 1p

Deoarece $|\sin(n-1)t| \le (n-1)|\sin t| \Rightarrow$ r= $|z| \ge \sqrt[n]{\dfrac{1}{n-1}}$, **n∈ℕ,n≥2**....................2p

Problema 4.

Soluţie şi barem

a) Se demonstrează prin inducţie P(k): $\sqrt[k]{k!} \le \dfrac{k}{2}, (\forall)k \in N, k \ge 6.$

P(6): $6! < 3^6$ este adevarată; presupunem P(k)-adevarată şi demonstrăm P(k+1). Este suficient să demonstrăm $2 \cdot k^k \le (k+1)^k$, care rescrisă devine $2 \le \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$ şi este adevarată conform inegalităţii lui Bernoulli....................4p

b) Din subpunctul a) rezultă $\prod_{k=6}^{n} \sqrt[k]{k!} \le \prod_{k=6}^{n} \dfrac{k}{2} = \dfrac{n!}{2^{n-5} \cdot 5!}$ (1)....................1p

Pentru $k \in \{1,2,3,4,5\}$ se verifică $\sqrt[k]{k!} \le \dfrac{k+1}{2}$, deci:

$1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdot \sqrt[5]{5!} \le \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2^5}$ (2)....................1p

Din (1) si (2) deducem: $1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n!} \le \dfrac{6 \cdot n!}{2^n}$....................1p

Notă: Orice altă soluţie corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.