OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 22 februarie 2015

Clasa a VIII- a

SUBIECTUL I (7p)

a). (3p) Să se arate că $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, pentru orice a şi b numere reale nenegative.
b). (4p) Să se rezolve ecuaţia în numere reale

$$x + y + z - 21 = 2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22}$$

SUBIECTUL II (7p)

a) (3p) Să se afle partea întreagă a numarului a, unde

$$a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \ldots + \sqrt{4031 - 2\sqrt{2015 \cdot 2016}}$$

b). (4p) Dacă $9x^2 + 11xy + 2y^2 = 0$, cu x si y reale nenule, atunci $\frac{5x+2y}{4x+y} \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (7p)

Punctele A, B, C şi D sunt necoplanare, iar M este mijlocul segmentului [BC], T este mijlocul segmentului [AC], iar N∈[AC] încât AN = 2·NC, P∈[AB] încât AP = 3·PB, E ∈[AC] astfel încât CE=$\frac{AC}{6}$ şi R este simetricul lui M faţă de punctual N. Demonstraţi că punctele D, P, T şi R sunt coplanare.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie tetraedrul ABCD şi un punct M situat în interiorul triunghiului BCD. Paralelele duse prin M la muchiile AB, AC si AD intersecteaza feţele (ACD), (ABD) şi respectiv (ABC) în punctele A', B', si respectiv C'. Dacă (DBC)||(A'B'C'), atunci demonstraţi că M este centrul de greutate al triunghiului BCD.

(G.M. nr. 12/2014)

NOTA:

Timp de lucru **3 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
februarie 2015
BAREM DE NOTARE SI CORECTARE

Subiectul I.

a). Deoarece ambele părţi ale inecuaţiei sunt nenegative, inecuaţia este echivalentă cu

$4ab \leq (a+b)^2$ **(1p)**

ceea ce este echivalent cu $(a-b)^2 \geq 0$, evident o relaţie adevarată. **(2p)**

b). Pentru existenţa radicalilor, trebuie să considerăm $x \geq 4, y \geq 9, z \geq 22$

Aplicăm inegalitatea mediilor pentru fiecare radical astfel

$\sqrt{x-4} = \sqrt{1 \cdot (x-4)} \leq \frac{1+x-4}{2}$, deci $2\sqrt{x-4} \leq x-3$,

$2\sqrt{y-9} = \sqrt{4 \cdot (y-9)} \leq \frac{4+y-9}{2}$, deci $4\sqrt{y-9} \leq y-5$,

$3\sqrt{z-22} = \sqrt{9 \cdot (z-22)} \leq \frac{9+z-22}{2}$, deci $6\sqrt{z-22} \leq z-13$.

Adunând aceste trei relaţii avem $2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22} \leq x+y+z-21$ **(2p)**

cu egalitate dacă în fiecare inegalitate a mediilor cei doi termeni sunt egali, **(1p)**

adică $x-4=1, y-9=4, z-22=9$, deci $x=5, y=13, z=31$. **(1p)**

Subiectul II.

a). Termenul general al sumei este

$\sqrt{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2} = |\sqrt{k+1}-\sqrt{k}| = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ **(1p)**

Efectuând suma, termenii se simplifica şi avem ca **(1p)**

$a = \sqrt{2016} - 1 \simeq 44{,}8 - 1 = 43{,}8$, deci [a]=43. **(1p)**

b). Descompunem în factori relaţia dată şi obţinem $9x^2 + 11xy + 2y^2 = 9x^2 + 9xy + 2xy + 2y^2 = (9x+2y)(x+y) = 0$. **(2p)**

Avem două cazuri

1. x = -y, atunci $\frac{5x+2y}{4x+y} = \frac{3x}{3x} = 1 \in \mathbb{N}$ **(1p)**
2. 9x = -2y, atunci $\frac{5x+2y}{4x+y} = \frac{5x-9x}{4x-\frac{9x}{2}} = \frac{-8x}{-x} = 8 \in \mathbb{N}$ **(1p)**

Subiectul III

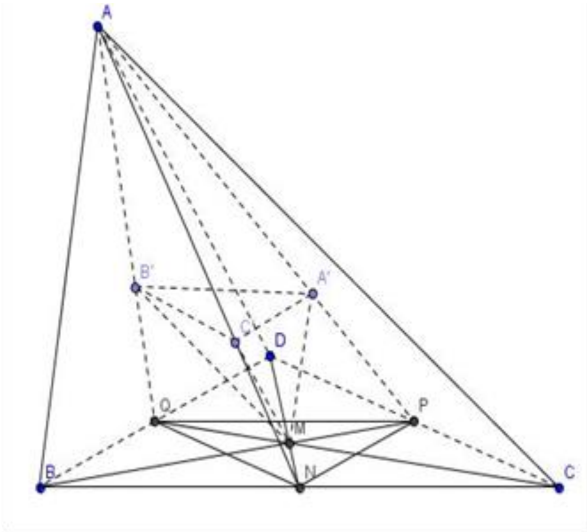
Patrulaterul MERT este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc)$\Longrightarrow$ ME ∥ RT (1)..............2 punct

[ME] este linie mijlocie în ΔCBN $\Rightarrow$ ME ∥ BN(2).. 1punct

$\frac{AP}{AB} = \frac{AT}{AN} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ BN ∥ PT (3) (Reciproca teoremei lui Thales) şi ME ∥ PT...............................1 punct

Din relațiile (2) şi (3) rezultă că ME ∥ PT ceea ce împreună cu relația (1) implică faptul că punctele R,T şi P sunt coliniare. 2punct

Finalizare .... 1 punct



Subiectul IV

Dreptele MC'||AD determină un plan care intersectează muchia BC în N. Analog (MA', AB) intersectează DC în P şi (MB', AC) intersecteaza DB în Q.

Deoarece A'C' || (DBC), dreapta de intersecţie dintre planul (AC'A') şi (ABC) este NP si A'C'|| NP.

Analog A'B'||PQ şi B'C'||NQ. **(2p)**

Aplicând Teorema lui Thales în triunghiurile ANP, ANQ şi AMQ avem

$\frac{A'P}{AP} = \frac{C'N}{AN} = \frac{B'Q}{AQ}$(1). **(1p)**

Pe de alta parte, aplicând aceeaşi teoremă în triunghiurile ABP, AND şi AQC avem urmatoarele relatii$\frac{A'P}{AP} = \frac{MP}{BP}, \frac{C'N}{AN} = \frac{MN}{DN}, \frac{B'Q}{AQ} = \frac{MQ}{CQ}$(2).

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $\frac{MN}{DN} = \frac{MQ}{CQ} = \frac{MP}{BP} \Rightarrow \frac{MN}{MD} = \frac{MP}{MB} = \frac{QM}{CM}$. **(2p)**

Considerăm triunghiurile MPQ şi MBC care vor fi asemenea (LUL), deci QP|| BC. Analog QN ||DC şi NP || BD. **(1p)**

Scriind acum în triunghiul DBC următoarele rapoarte, avem conform Teoremei lui Thales

$\frac{BN}{BC} = \frac{DP}{DC} = \frac{DQ}{DB} = \frac{NC}{BC}$, deci N este mijlocul lui (BC). **(1p)**

În mod analog, P este mijlocul lui (DC), iar Q mijlocul lui (BD). În consecinţă, M este centrul de greutate al triunghiului DBC