OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
21.02.2016

CLASA a VI-a

Problema 1. Se consideră punctele coliniare $A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$ în această ordine astfel încât $A_1A_2 = 2 \cdot A_0A_1, A_2A_3 = 2 \cdot A_1A_2, A_3A_4 = 2 \cdot A_2A_3, ..., A_9A_{10} = 2 \cdot A_8A_9$. Ştiind că distanţa dintre mijloacele segmentelor $[A_1A_3]$ şi $[A_3A_5]$ este de $15cm$ să se determine lungimea segmentului $[A_0A_{10}]$.

Barem:

Fie $A_0A_1 = x \Rightarrow A_1A_2 = 2x, A_2A_3 = 2^2 x, A_3A_4 = 2^3 x, ..., A_9A_{10} = 2^9 x$ 1p

$A_1A_3 = A_1A_2 + A_2A_3 = 6x$

Fie M mijlocul segmentului $[A_1A_3] \Rightarrow A_1M = MA_3 = 3x$ 1p

$A_3A_5 = A_3A_4 + A_4A_5 = 24x$

Dacă N este mijlocul segmentului $[A_3A_5] \Rightarrow A_3N = NA_5 = 12x$ 1p

$MN = MA_3 + A_3N = 3x + 12x = 15x$ 1p

$MN = 15cm \Rightarrow x = 1cm$ 1p

$A_0A_{10} = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_9A_{10} = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$ 1p

$A_0A_{10} = 1023cm$ 1p

Problema 2. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ se consideră semidreptele $(OC$ şi $(OD$. Ştiind că unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$ sunt suplementare şi $m(\sphericalangle AOB) = 4 \cdot m(\sphericalangle COD)$ determinaţi măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOD$.

Barem:

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 180^\circ$ şi $m(\sphericalangle AOB) = 4 \cdot m(\sphericalangle COD) \Rightarrow m(\sphericalangle COD) = 36^\circ$

şi $m(\sphericalangle AOB) = 144^\circ$ 2p

Fie $(OM$ şi $(ON$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$.

Cazul I : Dacă $(OC \subset Int(\sphericalangle AOD)$

Notăm $m(\sphericalangle AOC) = a$ şi $m(\sphericalangle DOB) = b$

$a + b = m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle COD) = 108^\circ$ 1p

$$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOC) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DON) = \frac{a}{2} + 36^\circ + \frac{b}{2} = 36^\circ + \frac{a+b}{2} =$$

$$= 36^\circ + \frac{108^\circ}{2} = 90^\circ$$ 1p

Cazul II : Dacă $(OD \subset Int(\sphericalangle AOC)$

Notăm $m(\sphericalangle AOD) = a$ şi $m(\sphericalangle COB) = b \Rightarrow a + b = m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle COD) = 108^\circ$ 1p

$m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOC) = \frac{a+36^\circ}{2}$ $m(\sphericalangle DON) = m(\sphericalangle NOB) = \frac{b+36^\circ}{2}$ 1p

$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle AOM) - m(\sphericalangle NOB)$

$m(\sphericalangle MON) = 144^\circ - \frac{a+36^\circ}{2} - \frac{b+36^\circ}{2} = 144^\circ - \frac{a+b+72^\circ}{2} = 144^\circ - 90^\circ = 54^\circ$ 1p

Problema 3.
Să se arate că pătratul produsului tuturor divizorilor naturali ai numărului 2016 este 2016^{36} .

Barem:
Descompunerea numărului $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ 1p
Numărul divizorilor numărului 2016 este $(1+5)\cdot(1+2)\cdot(1+1) = 36$ 1p
Fie $d_1, d_2, ..., d_{36}$ divizorii distincţi ai lui 2016 ordonaţi crescător.
Numerele $\frac{2016}{d_{36}}, \frac{2016}{d_{35}}, ..., \frac{2016}{d_1}$ sunt deasemenea divizori distincţi ai lui 2016 şi ordonaţi crescător. 2p
Obţinem $d_1 = \frac{2016}{d_{36}}, d_2 = \frac{2016}{d_{35}}, ..., d_{36} = \frac{2016}{d_1}$ 2p
$(d_1 \cdot d_2 \cdot ..... \cdot d_{36})^2 = d_1 \cdot d_2 \cdot .... \cdot d_{36} \cdot \frac{2016}{d_{36}} \cdot \frac{2016}{d_{35}} \cdot ..... \cdot \frac{2016}{d_1} = 2016^{36}$ 1p

Problema 4. Se dau şase numere naturale nenule,distincte cu suma egală cu 26.
a) Să se arate că produsul celor şase numere este divizibil cu 12.
b) Să se arate că dacă produsul celor şase numere **nu** este divizibil cu 24 atunci este divizibil cu 36.
Barem:
a) Dacă toate numerele ar fi impare atunci suma lor este mai mare sa egală cu $1+3+5+7+9+11=36$. Contradicţie.
Prin urmare printre cele şase numere există cel puţin un număr par. ....1p.
Dacă printre cele şase numere unul singur este par atunci suma lor este număr impar . Contradicţie. În concluzie există cel puţin două numere pare printre cele şase numere....... .1p
Dacă avem două numere pare printre cele şase numere produsul acestora se divide cu 4... ..1p
Dacă printre cele şase numere nu există nici un multiplu de 3 atunci suma celor şase numere este mai mare sau egală cu $1+2+4+5+7+8=27$ .Contradicţie.
Obţinem deci că printre cele şase numere există un multiplu de 3 şi atunci produsul numerelor este divizibil cu 3...1p
Deoarece produsul este divizibil cu 4 şi 3 va fi divizibil cu 12.

b) Folosind concluzia de subpunctul a) şi ipoteza de la b) obţinem că printre cele şase numere există exact două numere pare ambele **ne**divizibile cu 4...1p
Dacă produsul celor şase numere nu este divizibil cu 9 atunci suma celor şase numere este mai mare sau egală cu $1+2+3+5+7+10=28$.
Contradicţie. Vom avea deci produsul celor şase numere divizibil cu 9....................... .1p
În ipoteza subpunctului b) produsul numerelor este divizibil cu 9 şi cu 4 (de la a)) deci divizibil cu 36 ....1p

Soluție alternativă

Fie a,b,c,d,e,f cele șase numere ordonate crescător S suma lor.

Dacă $a\geq 2$ atunci $S\geq 2+3+4+5+6+7=27$. Rezultă deci $a=1$

Dacă $f\geq 12$ atunci $S\geq 1+2+3+4+5+12=27$ .Rezultă deci că $f\leq 11$

I. Pentru $f=11$ avem $1+b+c+d+e+11=26$ de unde $b=2,c=3,d=4,e=5$

II.Pentru $f=10$ avem $b+c+d+e=15$ și $b+c+d\geq 2+3+4$ prin urmare $e\leq 6$ se obțin numerele 1,2,3,4,6.10

III.Pentru $f=9$ avem $b+c+d+e=16$,$b+c+d\geq 2+3+4$ prin urmare $e\leq 7$

Dacă $e=7$ obținem numerele 1,2,3,4,7,9 dacă $e=6$ obținem numerele 1,2,3,5,6,9 dacă $e=5$ nu avem soluții.

IV. Pentru $f=8$ avem $b+c+d+e=17$,$5\leq e<f$ .Dacă $e=7$ obținem numerele 1,2,3,5,7,8 dacă $e=6$ obținem numerele 1,2,4,5,6,8 dacă $e=5$ nu avem soluții.

V. Pentru $f=7$ avem $b+c+d+e=18$,$5\leq e<f$ .Dacă $e=6$ obținem numerele 1,3,4,5,6,7 dacă $e=5$ nu avem soluții.

VI. Pentru $f=6$ avem $e=5,d=4,c=3,b=2,a=1$ care nu convin.

Verificarea cerințelor în cele 7 situații posibile este imediată.

Barem:

$a=1$ 1p

$f\leq 11$ 1p

Analizarea cazurilor I,II,...VI și obținerea soluțiilor $6\times 0,5p=$ 3p

Verificarea cerinței de la a) pentru toate soluțiile 1p

Verificarea soluției de la b) pentru soluția care verifică ipoteza 1p