Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Problema 1:

a) Daţi un exemplu de patru numere reale nenule şi distincte a, b, c, d pentru care

$$a+b=c+d \text{ şi } a^2+b^2=c^2+d^2.$$

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b=c+d$ şi $a^2+b^2=c^2+d^2$.

Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este adevărată egalitatea $a^n+b^n=c^n+d^n$.

* * *

Problema 2:

Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z.

a) Arătaţi că: $$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq \frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}$$

b) Dacă, în plus, $x+y+z \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, demonstraţi că:

$$\frac{x+y+1}{x+y+z^2}+\frac{y+z+1}{y+z+x^2}+\frac{z+x+1}{z+x+y^2} \leq 3.$$

Gazeta Matematică 5 / 2012

Problema 3:

Se consideră un triunghi ABC.

Folosind notaţiile uzuale, arătaţi că $IG \parallel BC$ dacă şi numai dacă $AB+AC=2BC$.

* * *

Problema 4:

Se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ pe un cerc de centru O şi rază 1, cu $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{O}$. Demonstraţi că $MA_1+MA_2+...+MA_n \geq n$, oricare ar fi punctul M din planul cercului.

Gazeta Matematică 1 / 2012

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a IX-a, BAREME

Problema 1:

orice exemplu corect ....2 pct

$ab = cd$ ....2 pct

Demonstraţie ....3 pct

Problema 2:

Arată că $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq \dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}$ pentru $x \geq 1$ şi pentru $x < 1$ ....2 pct

Rescrie inegalitatea sub forma $\dfrac{z^2-1}{x+y+z^2}+\dfrac{y^2-1}{x+z+y^2}+\dfrac{x^2-1}{z+y+x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \dfrac{x^2-1}{x^2+y+z} \geq 0$. 3pct

$\sum \dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z} = \dfrac{1}{x+y+z}\left(x+y+z-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right) \geq 0$ ....2 pct

Problema 3:

Obţine pentru orice punct M relaţia $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MI}$ 1pct

Obţine $\overrightarrow{GA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{GB}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BR}$ şi $\overrightarrow{GC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CS}$, unde P, R, S mij lat $(BC),(AC),(AB)$ 2pct

Inlocuieşte relaţiile de mai sus şi obţine $(a+b+c)\overrightarrow{GI}=-\dfrac{2}{3}\left(a\overrightarrow{AP}+b\overrightarrow{BR}+c\overrightarrow{CS}\right)$ 1pct

Foloseşte $2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ şi ajunge la $(a+b+c)\overrightarrow{GI}=-\dfrac{1}{3}\left[\left(2a-b-c\overrightarrow{AB}\right)+\left(b+a-2c\right)\overrightarrow{BC}\right]$ 2pct

$IG \parallel BC \Leftrightarrow \overrightarrow{IG}$ şi $\overrightarrow{BC}$ au aceeaşi direcţie $\Leftrightarrow 2a-b-c=0$ sau $b+c=2a$ 1pct

Problema 4:

$\sum_{k=1}^{n} MA_k = \sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OM}|$ 2pct

$\sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OA_k}| \geq \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{OA_k} = \sum_{k=1}^{n} (1-\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA_k})$ 2pct

$\sum_{k=1}^{n} (1-\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA_k}) = n - \overrightarrow{OM} \cdot \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k} = n$ 3pct

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://cs.isj.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro