OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanţa 21.02.2016

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Fie $a,b,c\in(1;\infty), a+b+c=9$.

Arătaţi că $\sqrt{\log_3 a^b+\log_3 a^c}+\sqrt{\log_3 b^c+\log_3 b^a}+\sqrt{\log_3 c^a+\log_3 c^b}\le 3\sqrt{6}$.

prof. Gabriela Constantinescu

SUBIECTUL 2

Fie $x\in R$ cu $|x-1|\le\frac{1}{5}$. Determinaţi x dacă $\sqrt[3]{(6-5x)(4x-3)}+\sqrt[3]{(5x-4)(5-4x)}=2$.

prof. Alexandru Cărnaru

SUBIECTUL 3

Rezolvaţi ecuaţia $2\cdot\log_3\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}$.

prof. Niculae Cavachi

SUBIECTUL 4

Fie $z\in\mathbf{C}-\mathbf{R}$ astfel încât $z^3+z+1=0$. Arătaţi că $|z|\in\left(1,\sqrt{2}\right)$.

prof. Dorin Arventiev

Notă:
Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanţa 21.02.2016
Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

$\left(\sqrt{(b+c)\log_3 a}+\sqrt{(a+c)\log_3 b}+\sqrt{(b+a)\log_3 c}\right)^2 \le (2a+2b+2c)\log_3(abc)=18\cdot 3\log_3\sqrt[3]{abc}$ ..**3p**

$\le 18\cdot 3\log_3\dfrac{a+b+c}{3}=54$ ....**3p,** de unde concluzia **1p**

SUBIECTUL 2

Cum $|x-1|\le\dfrac{1}{5}$ sau $x\in\left[\dfrac{4}{5},\dfrac{6}{5}\right]$ obținem că toate parantezele sunt pozitive **2p**

și aplicăm inegalitatea mediilor

$\sqrt[3]{(6-5x)(4x-3)\cdot 1}+\sqrt[3]{(5x-4)(5-4x)\cdot 1}\le\dfrac{6-5x+4x-3+1}{3}+\dfrac{5x-4+5-4x+1}{3}=2$ **3p**

cu egalitate când toate parantezele sunt egale cu 1, obținem $x=1$ soluție unică **2p**

SUBIECTUL 3

Domeniul este $[1;\infty)$. Avem $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}\le 2$, deoarece

$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\ge 2, \forall x\ge 1$ ca funcție strict crescătoare **3p**

$\log_3\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\le 1\Leftrightarrow x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\le 3$ **1p**

Notez $\sqrt[3]{x}=u, u\ge 1\Rightarrow u^4-3u+2\le 0\Rightarrow (u-1)(u^3+u^2+u-2)\le 0$ **2p**

dar $u^3+u^2+u-2\ge 1$ și deci $(u-1)\le 0\Leftrightarrow u\le 1\Rightarrow u=1\Rightarrow x=1$ soluție unică **1p**

SUBIECTUL 4

Fie $z=a+ib, a,b\in R, b\ne 0$, obținem $a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i+a+bi+1=0$ și avem

$\begin{cases} a^3-3ab^2+a+1=0(*) \\ 3a^2b-b^3+b=0\Leftrightarrow 3a^2-b^2+1=0\end{cases}$ ....**2p** $\Rightarrow$ $3a^2=b^2-1\Rightarrow a^2+b^2=1+4a^2>1$,

(dacă $a=0$ din (*) obținem 1=0 fals ....**2p**. Deci $|z|>1$, din ecuația inițială obținem succesiv $|z|^3=|z+1|\le|z|+1$ sau $|z|\left(|z|^2-1\right)\le 1$. dar $|z|>1$ și $\left(|z|^2-1\right)>0$ implică $\left(|z|^2-1\right)<1$, deci $|z|<\sqrt{2}$ de unde concluzia $|z|\in\left(1,\sqrt{2}\right)$ **3p**

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .