Olimpiada naţională de matematică- clasa a VII-a
Etapa locală- 16 februarie 2014

SUBIECTUL 1.

Aflaţi numerele întregi x, diferite de -1, astfel încât $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

Cioancă Monica, C.N. Liviu Rebreanu, Bistriţa

SUBIECTUL 2.

Fie ABC un triunghi şi M mijlocul lui [BC] . Dacă P este un punct astfel încât M ∈ (AP) şi triunghiurile ABM şi PBM au aceeaşi arie, stabiliţi natura patrulaterului ABPC.

Suplimentul Gazetei Matematice, decembrie, 2013

SUBIECTUL 3.

Considerăm numerele raţionale:

$$a = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2013}$$ şi

$$b = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{12^2} + \frac{9}{20^2} + \cdots + \frac{89}{1980^2}$$

Arătaţi că numărul $c = \sqrt{2\cdot\frac{1-b}{1-a}}$ este iraţional.

****

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru 2 ore.

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Soluție și Barem de corectare

SUBIECTUL1.

Fie $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$=k, k natural deci întreg.. 1p

Ridicăm la pătrat relația de mai sus și obținem

$k^2=\frac{x-2010}{x+1}$ 1p

sau $k^2=\frac{x+1-2011}{x+1}=1-\frac{2011}{x+1}$. 2p

Deoarece k^2 este număr întreg rezultă că $\frac{2011}{x+1}$ este număr întreg............ 1p

Adică x+ 1 ∈ { -1;1;-2011; 2011} şi x ∈ { -2; 0; -2012; 2010} 1p

Înlocuind valorile lui x în $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ ∈ ℤ obținem că x=2010.................. 1p

SUBIECTUL 2.

Construim $BE\perp AP$.. 1p

$S_{ABM}=\frac{BE\cdot AM}{2}$ 1p

$S_{BPM}=\frac{BE\cdot PM}{2}$ 1p

$\frac{BE\cdot AM}{2}=\frac{BE\cdot PM}{2}$ 1p

Din relația de mai sus rezultă că AM=PM și cum BM=MC rezultă că ABPC este paralelogram. 1p

Discuție

Dacă triunghiul ABC este isoscel de bază [BC], sau echilateral, atunci ABPC este romb. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de bază [BC], atunci patrulaterul ABPC este pătrat. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci ABPC este dreptunghi 2p

SUBIECTUL 3.

Calculând sumele de la numitorii fracţiilor obţinem că $a = \frac{2}{2\cdot3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2}{4\cdot5} +$
$+ \cdots + \frac{2}{2013\cdot2014}$ 1p

Dând apoi factor comun pe 2 şi folosind egalitatea $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, n natural $n \neq 0$, avem că $a = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2014}\right) = \frac{2012}{2014}$ 1p

Observând o regulă de formare a numitorilor, numărul b îl mai putem scrie
$b = \frac{3}{1\cdot4} + \frac{5}{2^2\cdot3^2} + \frac{7}{3^2\cdot4^2} + \frac{9}{4^2\cdot5^2} + \cdots + \frac{89}{44^2\cdot45^2}$ 1p

Prin ridicarea la pătrat a fiecărui factor de la numitorii fracţiilor putem scrie
$b = \frac{3}{1\cdot4} + \frac{5}{4\cdot9} + \frac{7}{9\cdot16} + \frac{9}{16\cdot25} + \cdots + \frac{89}{1936\cdot2025}$ 1p

Şi utilizînd faptul că $\frac{3}{1\cdot4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}; \frac{5}{4\cdot9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}; \ldots; \frac{89}{1936\cdot2025} = \frac{1}{1936} - \frac{1}{2025};$

avem $b = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1936} - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$ 1p

Înlocuind valorile numerelor a şi b în $c = \sqrt{2 \cdot \frac{1-b}{1-a}}$ obţinem că $c = \sqrt{2 \cdot \frac{\frac{1}{2025}}{\frac{2}{2014}}} =$
$= \sqrt{\frac{2014}{2025}} = \frac{\sqrt{2014}}{45}$, adică c este număr iraţional 2p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Olimpiada naţională de matematică- clasa a VII-a
Etapa locală- 16 februarie 2014

SUBIECTUL 1.

Aflaţi numerele întregi x, diferite de -1, astfel încât $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

Cioancă Monica, C.N. Liviu Rebreanu, Bistriţa

SUBIECTUL 2.

Fie ABC un triunghi şi M mijlocul lui [BC] . Dacă P este un punct astfel încât $M \in (AP)$ şi triunghiurile ABM şi PBM au aceeaşi arie, stabiliţi natura patrulaterului ABPC.

Suplimentul Gazetei Matematice, decembrie, 2013

SUBIECTUL 3.

Considerăm numerele raţionale:

$a = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2013}$ şi

$b = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{12^2} + \frac{9}{20^2} + \cdots + \frac{89}{1980^2}$

Arătaţi că numărul $c = \sqrt{2\cdot\frac{1-b}{1-a}}$ este iraţional.

****

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru 2 ore.

Soluție și Barem de corectare

SUBIECTUL1.

Fie $\sqrt{\dfrac{x-2010}{x+1}}$=k, k natural deci întreg.. 1p

Ridicăm la pătrat relația de mai sus și obținem

$k^2=\dfrac{x-2010}{x+1}$ 1p

sau $k^2=\dfrac{x+1-2011}{x+1}=1-\dfrac{2011}{x+1}$. 2p

Deoarece k^2 este număr întreg rezultă că $\dfrac{2011}{x+1}$ este număr întreg............ 1p

Adică x+ 1 ∈ { -1;1;-2011; 2011} şi x ∈ { -2; 0; -2012; 2010} 1p

Înlocuind valorile lui x în $\sqrt{\dfrac{x-2010}{x+1}}$ ∈ ℤ obținem că x=2010.................. 1p

SUBIECTUL 2.

Construim $BE \perp AP$... 1p

$S_{ABM}=\dfrac{BE \cdot AM}{2}$ 1p

$S_{BPM}=\dfrac{BE \cdot PM}{2}$ 1p

$\dfrac{BE \cdot AM}{2}=\dfrac{BE \cdot PM}{2}$ 1p

Din relația de mai sus rezultă că AM=PM și cum BM=MC rezultă că ABPC este paralelogram. 1p

Discuție

Dacă triunghiul ABC este isoscel de bază [BC], sau echilateral, atunci ABPC este romb. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de bază [BC], atunci patrulaterul ABPC este pătrat. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci ABPC este dreptunghi 2p

SUBIECTUL 3.

Calculând sumele de la numitorii fracţiilor obţinem că $a = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{2013 \cdot 2014}$ 1p

Dând apoi factor comun pe 2 şi folosind egalitatea $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, n natural $n \neq 0$, avem că $a = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2014}\right) = \frac{2012}{2014}$ 1p

Observând o regulă de formare a numitorilor, numărul b îl mai putem scrie $b = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \cdots + \frac{89}{44^2 \cdot 45^2}$ 1p

Prin ridicarea la pătrat a fiecărui factor de la numitorii fracţiilor putem scrie $b = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \cdots + \frac{89}{1936 \cdot 2025}$ 1p

Şi utilizînd faptul că $\frac{3}{1 \cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}; \frac{5}{4 \cdot 9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}; \ldots; \frac{89}{1936 \cdot 2025} = \frac{1}{1936} - \frac{1}{2025};$

avem $b = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1936} - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$ 1p

Înlocuind valorile numerelor a şi b în $c = \sqrt{2 \cdot \frac{1-b}{1-a}}$ obţinem că $c = \sqrt{2 \cdot \frac{\frac{1}{2025}}{\frac{2}{2014}}} =$

$= \sqrt{\frac{2014}{2025}} = \frac{\sqrt{2014}}{45}$, adică c este număr iraţional 2p