INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+1,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

a) Să se determine numerele a şi b ştiind că funcția admite valoarea minimă $-\frac{5}{4}$, iar graficul funcției este simetric față de dreapta de ecuație $x=\frac{3}{4}$.

b) Aflați aria triunghiului determinat de intersecțiile graficului cu axele de coordonate.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

a) Calculați suma $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n),\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinați valorile numărului natural n pentru care $[S_n]=3$, unde cu $[S_n]$ s-a notat partea întreagă a numărului S_n.

3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele M, N, P, Q pe laturile $[AB],[BC],[CD]$ şi respectiv $[DA]$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{CP}=a\overrightarrow{PD},\ \overrightarrow{DQ}=a\overrightarrow{QA},\ a>0$.

a) Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Arătați că dreptele AC, BD, MP, NQ sunt concurente.

4. Coborând în interiorul pământului, la fiecare 30,5m temperatura creşte cu $1^\circ\mathrm{C}$. Dacă la suprafața Pământului temperatura este de $10^\circ\mathrm{C}$, atunci:

a) Ce temperatură va fi la adâncimea de 1098m ?

b) La ce adâncime temperatura atinge punctul de fierbere al apei ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor în necunoscuta x :

a) $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}} = \sqrt{5}$;

b) $\dfrac{1}{3-\log_2 x} + \dfrac{1}{2+\log_2 x} = 1$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

a) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right) \geq \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{2}$.

b) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \dfrac{\ln a + \ln b}{2}, \quad \forall a,b \in (0,+\infty)$.

3. a) Să se arate că: $\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = x+2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$ şi $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x-2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 4$.

4. Fie A, B, C trei oraşe, astfel încât $d(A,B) = d(B,C)$ (s-a notat $d(x,y)$ distanța între oraşul x şi oraşul y). Două maşini plecă din oraşul A spre oraşul C , trecând prin oraşul B . Prima maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza v km/h, apoi de la B la C merge de două ori mai repede. A doua maşină merge de A la B cu viteza medie de 48 km/h, apoi parcurge distanța de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h. Cele două maşini parcurg distanța de la A la C în acelaşi timp. Calculați viteza v .

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Științe sociale

CLASA A XI-A

1. După două scumpiri succesive cu acelaşi procent, preţul unui produs este acelaşi cu cel obținut în urma unei singure scumpiri cu 44%. Care este procentul scumpirilor succesive?

2. Seria statistică prezentată în tabelul de mai jos redă frecvența relativă a mijloacelor de transport în comun, luând ca valori clasele ce reprezintă intervalele orare dintr-o zi lucrătoare.

Interval orar	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)	[20;24)
Frecvența relativă	0,05	0,15	0,25	0,2	0,25	0,1

a) Calculați media seriei statistice și clasa mediană.
b) Într-o zi de week-end frecvența relativă a celei de a treia clase scade, iar frecvența penultimei clase creşte cu atât cât a scăzut frecvența celei de a treia. Ştiind că media seriei statistice creşte cu 0,4, determinați frecvențele relative ale celor două clase .

3. Se consideră graful neorientat $G=(V,M)$ cu 5 vârfuri și
$M=\{[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[2,5],[3,4],[3,5],[4,5]\}$.
a) Arătați că graful G este conex.
b) Câte muchii mai trebuie adăugate pentru a obține un graf complet?
c) Câte muchii trebuie eliminate pentru a obține un graf arbore?

4. Fiecare elev dintr-o clasă trimite câte o felicitare fiecărui prieten din aceeași clasă. Demonstrați că cel puțin doi elevi trimit același număr de felicitări.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

.

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^2 şi A^3.

b) Arătaţi că $A^{2016}=2016A-2015I_2$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $X^2=A$, unde X este o matrice pătratica de ordinul 2, cu elemente numere reale.

2. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & 4x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, x număr real.

a) Calculaţi det($A(x)$).

b) Arătaţi că are loc egalitatea $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi x şi y numere reale.

c) Calculaţi $P=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, unde n este număr natural nenul.

3. În reperul cartezian (xOy) se consideră punctele $A_n(n-1,\ 2n+1)$, n număr natural.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Arătaţi că punctele A_0, A_1, A_n sunt coliniare oricare ar fi numărul natural n, $n\ge 2$.

c) Determinaţi numărul natural n, $n\ge 2$, astfel încât aria triunghiului OA_1A_n să fie 3.

4. În fiecare nod rezultat din intersecţiile celor 7 linii şi 7 coloane ale unui tablou pătratic se află câte o albină. La un moment dat toate albinele zboară şi fiecare se aşează pe un nod vecin, de pe aceeaşi linie sau coloană cu cel de pe care a zburat. Să se arate că există un nod pe care nu s-a aşezat nicio albină.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+1,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

a) Să se determine numerele a şi b ştiind că funcția admite valoarea minimă $-\frac{5}{4}$, iar graficul funcției este simetric față de dreapta de ecuație $x=\frac{3}{4}$.

b) Aflați aria triunghiului determinat de intersecțiile graficului cu axele de coordonate.

Soluție.

a) $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{5}{4},\ -\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$ .... 2 puncte

$9a^2-36a=0$ .... 1 punct

$a=4, b=-6$ .... 1 punct

b) $G_f\cap(Ox):A(\frac{3-\sqrt{5}}{4},0), B(\frac{3+\sqrt{5}}{4},0);\ G_f\cap(Oy):C(0,1)$ .... 2 puncte

$A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot OC}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$ .... 1 punct

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

a) Calculați suma $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n),\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinați valorile numărului natural n pentru care $[S_n]=3$, unde cu $[S_n]$ s-a notat partea întreagă a numărului S_n.

Soluție.

a) $S_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ .... 1 punct

$S_n=\sqrt{n+1}-1$ .... 2 puncte

b) $\left[\sqrt{n+1}-1\right]=3 \Leftrightarrow 3\le\sqrt{n+1}-1<4$ .... 2 puncte

$15\le n<24$ .... 1 punct

$n\in\{15,16,17,18,19,20,21,22,23\}$ .... 1 punct

3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele M, N, P, Q pe laturile $[AB],[BC],[CD]$ şi respectiv $[DA]$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{CP}=a\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{DQ}=a\overrightarrow{QA}, a>0$.

a) Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Arătați că dreptele AC, BD, MP, NQ sunt concurente.

Soluție.

a) $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CP}=a\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PC}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{DQ}=a\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{QA}=\overrightarrow{CN}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{PN} \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.. 2 puncte

b) $MBPD$ este paralelogram.. 1 punct

$BNDQ$ este paralelogram... 1 punct

$[AC],[BD],[MP],[NQ]$ au acelaşi mijloc... 1 punct

4. Coborând în interiorul pământului, la fiecare 30,5m temperatura creşte cu $1^\circ C$. Dacă la suprafața Pământului temperatura este de $10^\circ C$, atunci:

a) Ce temperatură va fi la adâncimea de 1098m ?

b) La ce adâncime temperatura atinge punctul de fierbere al apei ?

Soluție.

a) $T(n)=$temperatura la n metri. $T(n)=10+\frac{n}{30,5}$ .... 2 puncte

$T(1098)=10+\frac{1098}{30,5}$ .... 1 punct

$T(1098)=46^\circ C$ .... 1 punct

b) $10+\frac{n}{30,5}=100$ .... 2 puncte

$n=2745m$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor în necunoscuta x :

a) $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}}=\sqrt{5}$; b) $\dfrac{1}{3-\log_2 x}+\dfrac{1}{2+\log_2 x}=1$.

Soluție.

a) $\begin{cases} x^2-4\ge 0 \\ x>0 \\ x\ne 1 \end{cases} \Rightarrow x\in[2,+\infty)$ .... 1 punct

$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$ .... 1 punct

$x=3$ soluția ecuației .... 1 punct

b) $\begin{cases} x>0 \\ 3-\log_2 x\ne 0 \Rightarrow x\in(0,+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{4},8\right\} \\ 2+\log_2 x\ne 0 \end{cases}$ .... 1 punct

$\log_2 x=t$, $\dfrac{1}{3-t}+\dfrac{1}{2+t}=1\Rightarrow t^2-t-1=0$ .... 1 punct

$t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \log_2 x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_1=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, x_1\in(0,+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1}{4},8\right\}$ .... 1 punct

$t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \log_2 x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, x_2\in(0,+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1}{4},8\right\}$ .... 1 punct

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.

a) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right)\ge\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}$.

b) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ge\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$, $\forall a,b\in(0,+\infty)$.

Soluție.

a) $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right)\ge\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{5}{2}\ge\dfrac{\ln 6}{2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{25}{4}\ge\ln 6$ .... 2 puncte

$\Leftrightarrow \dfrac{25}{4}\ge 6$ .... 1 punct

b) $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ge\dfrac{\ln(a\cdot b)}{2}$ .... 1 punct

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge ab$ .... 1 punct

$a^2-2ab+b^2\geq 0$ .... 1 punct

$(a-b)^2\geq 0,\ \forall a,b\in(0,+\infty)$ .... 1 punct

3. a) Să se arate că: $\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=x+2\sqrt{x-1},\ \forall x\geq 1$ şi $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=x-2\sqrt{x-1},\ \forall x\geq 1$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=4$.

Soluţie.

$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=x-1+2\sqrt{x-1}+1=x+2\sqrt{x-1}$ .... 1 punct

$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=x-1-2\sqrt{x-1}+1=x-2\sqrt{x-1}$ .... 1 punct

b) $(x-1)+1\geq 2\sqrt{x-1},\forall x\geq 1$ .... 1 punct

$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=4$ .... 1 punct

$\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=4$ .... 1 punct

Pentru $x\geq 2$, $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=4\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=5$ .... 1 punct

Pentru $x\in[1,2)$: $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=4\Leftrightarrow 2=4$, fals .... 1 punct

4. Fie A,B,C trei oraşe, astfel încât $d(A,B)=d(B,C)$ (s-a notat $d(x,y)$ distanţa între oraşul x şi oraşul y). Două maşini plecă din oraşul A spre oraşul C, trecând prin oraşul B. Prima maşină parcurge distanţa de la A la B cu viteza v km/h, apoi de la B la C merge de două ori mai repede. A doua maşină merge de A la B cu viteza medie de 48 km/h, apoi parcurge distanţa de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h. Cele două maşini parcurg distanţa de la A la C în acelaşi timp. Calculaţi viteza v.

Soluţie.

Notăm $d(A,B)=d(B,C)=d$.

Prima maşină parcurge distanţa de la A la B cu viteza v în timpul t, iar de la B la C cu viteza $2v$ în timpul $\frac{t}{2}$ .... 1 punct

A doua maşină parcurge distanţa de la A la B cu viteza 48 km/h în timpul t_1, iar de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h în timpul t_2 .... 1 punct

$$\begin{cases} t=\dfrac{d}{v} \\ \dfrac{t}{2}=\dfrac{d}{2v} \end{cases}$$ .... 1 punct

$t_1+t_2=\dfrac{d}{48}+\dfrac{d}{v+20}$ .... 1 punct

$t_1+t_2=\dfrac{3t}{2}=\dfrac{3d}{2v}$ .... 1 punct

$\dfrac{d}{48}+\dfrac{d}{v+20}=\dfrac{3d}{2v}$ .... 1 punct

$v^2-4v-1440=0\Rightarrow v=40$ km/h .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. După două scumpiri succesive cu acelaşi procent, preţul unui produs este acelaşi cu cel obţinut în urma unei singure scumpiri cu 44%. Care este procentul scumpirilor succesive?

Soluție.

Dacă a este preţul iniţial, după prima scumpire cu $p\%$ preţul va fi $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ .... 2 puncte

După a doua scumpire preţul va fi $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ .... 2 puncte

Preţul final este $\frac{144}{100}a$ .... 1 punct

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=\frac{144}{100}$ .... 1 punct

$p=20$ .... 1 punct

2. Seria statistică prezentată în tabelul de mai jos redă frecvenţa relativă a mijloacelor de transport în comun, luând ca valori clasele ce reprezintă intervalele orare dintr-o zi lucrătoare.

Interval orar	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)	[20;24)
Frecvența relativă	0,05	0,15	0,25	0,2	0,25	0,1

a) Calculaţi media seriei statistice şi clasa mediană.
b) Într-o zi de week-end frecvenţa relativă a celei de a treia clase scade, iar frecvenţa penultimei clase creşte cu atât cât a scăzut frecvenţa celei de a treia. Ştiind că media seriei statistice creşte cu 0,4, determinaţi frecvenţele relative ale celor două clase .

Soluție.

a) Media este $m=2\cdot 0,05+6\cdot 0,15+10\cdot 0,25+14\cdot 0,2+18\cdot 0,25+22\cdot 0,1=13$,
unde 2, 6, 10, 14, 18, 22, sunt valorile centrale ale claselor .... 2 puncte
Şirul frecvenţelor relative cumulate crescător este: 0,05; 0,2; 0,45; 0,65; 0,9, 1 .... 1 punct
Clasa mediană este intervalul [12;16). .... 1 punct
b) Dacă frecvenţa clasei a treia va fi $0,25-x$ iar a penultimei clase $0,25+x$, media pentru o zi de week-end este $2\cdot 0,05+6\cdot 0,15+10\cdot(0,25-x)+14\cdot 0,2+18\cdot(0,25+x)+22\cdot 0,1=13,4$. .... 1 punct
$x=0,05$ .... 1 punct
Frecvenţele relative ale celor două clase devin 0,2 şi 0,3.. 1 punct

3. Se consideră graful neorientat $G=(V,M)$ cu 5 vârfuri și

$M=\{[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[2,5],[3,4],[3,5],[4,5]\}$.

a) Arătați că graful G este conex.
b) Câte muchii mai trebuie adăugate pentru a obține un graf complet?
c) Câte muchii trebuie eliminate pentru a obține un graf arbore?

Soluție.

a) Graful este conex pentru că între oricare două vârfuri există cel putin un drum .... 2 puncte

b) $C_5^2=10$, 10 – 9 = 1, Trebuie adăugată muchia ($[1,5]$) .... 2 puncte

c) Graful arbore este conex și fără cicluri .... 2 puncte
Trebuie să eliminăm 5 muchii .... 1 punct

4. Fiecare elev dintr-o clasă trimite câte o felicitare fiecărui prieten din aceeași clasă. Demonstrați că cel puțin doi elevi trimit același număr de felicitări.

Soluție.

Asociem celor n elevi din clasă un gaf cu n vârfuri, unde gradul fiecărui vârf este numărul de felicitări trimise .... 1 punct

Presupunem prin reducere la absurd că gradele vârfurilor sunt $\{0,1,2,...,n-1\}$ .... 2 puncte

Înseamnă că există un vârf cu gradul *n – 1*, care va fi legat de toate celelalte $n-1$ vârfuri .. 2 puncte

Contradicție cu faptul că există un nod cu gradul 0 .... 2 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^2 şi A^3.

b) Arătaţi că $A^{2016}=2016A-2015I_2$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $X^2=A$, unde X este o matrice pătratica de ordinul 2, cu elemente numere reale.

Soluţie.

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$A^n+(n-1)I_2=nA, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$A^{2016}+2015I_2=2016A$ .... 1 punct

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, X^2=A \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+bc=1\\ b(a+d)=-2\\ c(a+d)=0\\ d^2+bc=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=1\\ b(a+d)=-2\\ c=0\\ d^2=1\end{cases}$ .... 2 puncte

$X\in\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ .... 1 punct

2. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & 4x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, x număr real.

a) Calculaţi det($A(x)$).

b) Arătaţi că are loc egalitatea $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi x şi y numere reale.

c) Calculaţi $P=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, unde n este număr natural nenul.

Soluție.

a) $\det(A(x)) = 1 - 4x^2 + 4x^2 = 1$, pentru orice x numă real. .... 2 puncte

b) Verifică relația .... 3 puncte

c) $P = A\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) = A\left(\frac{n}{n+1}\right)$, pentru orice n număr natural nenul .... 2 puncte

3. În reperul cartezian (xOy) se consideră punctele $A_n(n-1, 2n+1)$, n număr natural.

a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

b)Arătați că punctele A_0, A_1, A_n sunt coliniare oricare ar fi numărul natural n, $n \geq 2$.

c) Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, astfel încât aria triunghiului OA_1A_n să fie 3.

Soluție.

a) $A_0(-1,1)$, $A_1(0,3)$ .... 1 punct

Ecuația dreptei (A_0A_1) este: $2x - y + 3 = 0$ .... 2 puncte

b) $A_n \in A_0A_1$ deoarece $2(n-1) - (2n+1) + 3 = 0$. .... 2 puncte

c) $\frac{1}{2}\cdot\left|-3(n-1)\right| = 3$ .... 1 punct

$n = 3$ .... 1 punct

4. În fiecare nod rezultat din intersecțiile celor 7 linii şi 7 coloane ale unui tablou pătratic se află câte o albină. La un moment dat toate albinele zboară şi fiecare se aşează pe un nod vecin, de pe aceeaşi linie sau coloană cu cel de pe care a zburat.

Să se arate că există un nod pe care nu s-a așezat nicio albină.

Soluție.

Să considerăm nodurile tabloului colorate ca o tablă de şah, în alb şi negru.

Atunci 24 de noduri sunt albe şi 25 de noduri sunt negre (sau invers) .... 3 puncte

Observăm că o albină care pleacă de pe un nod negru ajunge pe unul alb, iar de pe un nod alb ajunge pe unul negru. Cum de pe nodurile albe au plecat 24 de albine, ele nu pot ocupa 25 de noduri negre(sau invers). .... 4 puncte