

## Olimpiada Națională de Matematică Faza Locală Dâmbovița – 23 Februarie 2014

---

### CLASA A IX-A

---

**Subiectul 1.** Rezolvați în numere reale sistemul: 
$$\begin{cases} [x] + y = 4,2 \\ 2x + [y] = 5,3 \end{cases}$$

Gazeta Matematică 2013

---

**Subiectul 2.** Demonstrați că pentru orice număr natural  $n > 1$ , are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Gazeta Matematică 1961

---

**Subiectul 3.** Determinați o progresie aritmetică din șase termeni  $t_1, t_2, \dots, t_6$  astfel ca suma pătratelor termenilor  $t_1, t_2, t_3, t_4$  să fie egală atât cu produsul  $t_1 t_2 t_3$  cât și cu produsul  $t_5 t_6$ .

Gazeta Matematică 1964

---

**Subiectul 4.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $M \in (BC)$ ,  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$  astfel încât

$BM = MC$ ,  $AB = m \cdot AD$  și  $AC = n \cdot AE$ . Notăm  $\{F\} = AM \cap DE$ . Demonstrați că:

a)  $m \cdot \overrightarrow{DF} = n \cdot \overrightarrow{FE}$ .

b)  $(m + n) \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

Gazeta Matematică 1976

---

## BAREM

### CLASA A IX-A

**Subiectul 1.**  $\{y\} = 0,2$  (1p);  $[x] + [y] = 4$  (1p);  $[2x] + [y] = 5$  (1p);  $[x + \frac{1}{2}] = 1$  (1p), deci  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$  (1p). Cazul 1.  $[x] = 0 \Rightarrow [y] = 4 \Rightarrow y = 4,2$ , apoi  $x = 0,65$  (1p); Cazul 2.  $[x] = 1 \Rightarrow [y] = 3 \Rightarrow y = 3,2$ , apoi  $x = 1,15$  (1p).

**Subiectul 2.** Verificare  $n = 2$  (2p); scrie  $P(n+1)$  (2p); Finalizare (3p).

**Subiectul 3.**  $a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 = (a+4r)(a+5r)$  (1p)  $\Rightarrow (a-r)(a+2r) = 0$  (2p). Cazul  $a = r$ , numerele sunt  $r, 2r, 3r, 4r, 5r, 6r$  (1p);  $r^2 + (2r)^2 + (3r)^2 + (4r)^2 = r \cdot 2r \cdot 3r \Rightarrow r = 0$  sau  $r = 5$  (1p). Cazul  $a = -2r$ , numerele sunt  $-2r, -r, 0, r, 2r, 3r$  (1p).  $(-2r)^2 + (-r)^2 + 0^2 + r^2 = (-2r)(-r)0 \Rightarrow r = 0$  (1p)

**Subiectul 4.** a)  $\frac{DF}{FE} = \frac{BM}{MC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AD}{AE}$  (2p);  $\frac{DF}{FE} = \frac{n}{m}$  (1p); b) Exprima  $\overrightarrow{AF}$  in functie de  $\overrightarrow{AD}$  si  $\overrightarrow{AE}$  (2p); Finalizare (2p).

**Nota:** pentru rezolvarea punctului b), folosind a) (nedemonstrat) se vor acorda (3p).