INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA a IX a

1. Fie a,b,c numere întregi, cu $a^2-4b=c^2$. Să se arate că numărul a^2-2b se scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

***Julieta Raicu*, Blaj (Gazeta matematică 2012)**

2. Se consideră triunghiul ABC oarecare, având lungimile laturilor $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC Şi punctele $M\in(BC)$, $N\in(CA)$, $P\in(AB)$ astfel încât

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\frac{MB}{MC}=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\frac{NC}{NA}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{PA}{PB}=1.$$

Să se arate că:

a) $AM\cap BN\cap CP=\{K\}$ (punctul lui Lemoine);

b) vectorii $\overrightarrow{IK}$ Şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari dacă Şi numai dacă $a=\dfrac{b^2+c^2}{b+c}$;

c) $\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ dacă Şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

***Gheorghe Alexe*, Brăila**

3. Rezolvaţi ecuaţia

$$x=\frac{[x]+2012}{\{x\}+2013},$$

unde $[x]$ Şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă şi respectiv partea fracţionară pentru numărul real x.

Marius Damian Şi Valentin Damian, Brăila

4. Fie $A_n=\{4,11,18,25,32,...,7n-3\}$ Şi $B_n=\{x\in A_n \mid x \text{ este pătrat perfect}\}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Notăm Card $A_n=a_n$ Şi Card $B_n=b_n$.

a) Să se determine b_{288}.

b) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ Ştiind că $a_n=120+b_n$.

***Gabriel Daniilescu*, Brăila**

Notă.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.

Timp de lucru 3 ore.