



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a VI-a

Enunțuri

Problema 1. Un număr natural se numește *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori și 12 este multiplu al lui 6).

- Determinați cel mai mare număr superb de două cifre.
- Demonstrați că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care $\frac{a+1}{b}$ și $\frac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Problema 3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D și perpendiculara în B pe BC în punctul E . Notăm cu F simetricul lui E față de B și cu P intersecția dreptelor DF și BC . Demonstrați că $EP \perp CF$.

Problema 4. Fie a, b numere naturale nenule pentru care există p număr prim cu proprietatea că $[a, a+p] = [b, b+p]$. Arătați că $a = b$.

Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y .

Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Problema 1.6 Un număr natural se numește *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori și 12 este multiplu al lui 6).

- Determinați cel mai mare număr superb de două cifre.
- Demonstrați că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Soluție a) $99 = 3^2 \cdot 11$. 99 are 6 divizori și $6 \nmid 99$.

$98 = 2 \cdot 7^2$. 98 are 6 divizori și $6 \nmid 98$.

$97 = 97$. 97 are 2 divizori și $2 \nmid 97$.

$96 = 2^5 \cdot 3$. 96 are 12 divizori și $12 \mid 96$.

Cel mai mare număr superb de două cifre este 96.2p

b) Fie X un număr natural cu $u(X) = 3$ ($u(X)$ - ultima cifră a lui X).

Dacă $u(X) = 3$, atunci X este impar.2p

Pe de altă parte $u(X) = 3$ implică X nu este pătrat perfect, iar un număr care nu este pătrat perfect are un număr par de divizori.2p

Cum un număr impar nu poate fi multiplul unui număr par deducem că X nu este superb. ...1p

Problema 2.6 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care $\frac{a+1}{b}$ și $\frac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Soluție $\frac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $b \mid a+1$, de unde $b \leq a+1$ și de aici $b+2 \leq a+3$.

Acum $\frac{b+2}{a} \leq \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \leq 4$. Cum $\frac{b+2}{a}$ este număr natural nenul rezultă $\frac{b+2}{a} \in \{1, 2, 3, 4\}$.
3p

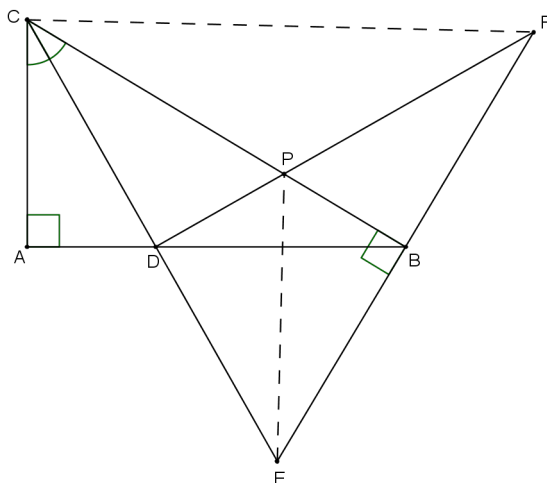
Dacă $\frac{b+2}{a} = 1$, atunci din $b+2 = a$ rezultă $b = a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $\frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}$ număr natural nenul, de unde $a \in \{3, 5\}$. Obținem soluțiile $a = 3, b = 1$ și $a = 5, b = 3$.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 2$, atunci din $b+2 = 2a$ rezultă $b = 2a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{2a+2}{2a-2} = 1 + \frac{4}{2a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{2, 3\}$. Obținem soluția $a = 3, b = 4$; varianta $a = 2, b = 2$ nu verifică condițiile inițiale.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 3$, atunci din $b+2 = 3a$ rezultă $b = 3a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{3a+3}{3a-2} = 1 + \frac{5}{3a-2}$ este număr natural, de unde $a \in \{1\}$. Obținem soluția $a = 1, b = 1$.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 4$, atunci $b+2 = 4a$ rezultă $b = 4a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{4a+4}{4a-2} = 1 + \frac{6}{4a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{1, 2\}$. Obținem soluția $a = 1, b = 2$; varianta $a = 2, b = 6$ nu verifică condițiile inițiale.4p

Problema 3.6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D și perpendiculara în B pe BC în punctul E . Notăm cu F simetricul lui E față de B și cu P intersecția dreptelor DF și BC . Demonstrați că $EP \perp CF$.



Soluție

În $\triangle BEC$, $m(\sphericalangle CEB) = 180^\circ - m(\sphericalangle EBC) - m(\sphericalangle ECB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ECB)$

În $\triangle ADC$, $m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ - m(\sphericalangle DAC) - m(\sphericalangle ACD) = 90^\circ - m(\sphericalangle ACD)$

Cum $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ECB)$, rezultă $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle CEB$ (1) 3p

Dar $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EDB$. De aici și din (1) rezultă $[BD] \equiv [BE]$. Cum $[BE] \equiv [BF]$ deducem că $[BD] \equiv [BE] \equiv [BF]$ și atunci $\triangle DEF$ este dreptunghic în D 2p

În $\triangle CEF$, CB și FD înălțimi implică P ortocentrul. În concluzie, EP este înălțime, adică $EP \perp CF$ 2p

Problema 4.6 Fie a, b numere naturale nenule pentru care există p număr prim cu proprietatea că $[a, a + p] = [b, b + p]$. Arătați că $a = b$.

Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y .

Soluție Din $(x, y) \cdot [x, y] = xy$ deducem $[xy] = \frac{xy}{(x, y)}$. Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun

pentru x și y . Cu aceasta egalitatea din enunț devine $\frac{a(a + p)}{(a, a + p)} = \frac{b(b + p)}{(b, b + p)}$. (1) 1p

Notăm $d_1 = (a, a + p) \in \{1, p\}$ și $d_2 = (b, b + p) \in \{1, p\}$.

Dacă $d_1 = d_2$ relația (1) conduce la $a(a + p) = b(b + p)$, de unde $a = b$.

Presupunând $a \neq b$ putem avea $a < b$. Atunci $a + p < b + p$, de unde deducem $a(a + p) < b(b + p)$; contradicție. Dacă $a > b$, atunci $a + p > b + p$, de unde deducem $a(a + p) > b(b + p)$; contradicție. 2p

Dacă $d_1 = 1$ și $d_2 = p$ relația (1) devine $a(a + p) = \frac{b(b + p)}{p}$ sau $pa(a + p) = b(b + p)$. (2)

Din $d_1 = 1$ deducem că $p \nmid a$ și $p \nmid a + p$, iar din $d_2 = p$ deducem că $p \mid b$ sau $b = px$, cu x număr natural.

Cu aceasta, relația (2) devine $pa(a + p) = p^2x(x + 1)$ sau $a(a + p) = px(x + 1)$, de unde deducem că $p \mid a(a + p)$ și cum p este număr prim rezultă $p \mid a$; contradicție.

Aceasta arată că situația $d_1 = 1$ și $d_2 = p$ nu este posibilă.

Analog se tratează cazul $d_1 = p$ și $d_2 = 1$ 4p