Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 26 aprilie 2018

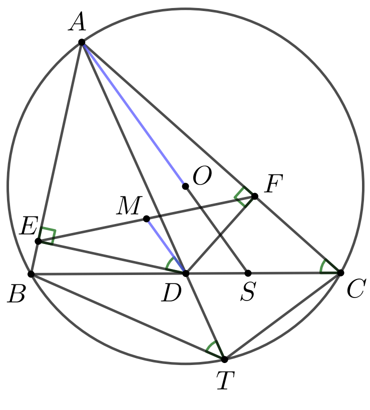
Problema 1. Determinaţi numerele prime p pentru care numărul $a = 7^p - p - 16$ este pătrat perfect.

Lucian Petrescu

Soluţie: $p = 2$ nu verifică. $p = 3$ este soluţie: $a = 7^3 - 3 - 16 = 324 = 18^2$. Arătăm că nu avem alte soluţii. Fie $p \geq 5$ un număr prim. Dacă $p \equiv 1 \pmod 4$, atunci $a \equiv 2 \pmod 4$, deci a nu este pătrat perfect. Se constată uşor că $p = 7$ nu este soluţie (calculând a, ultimele două cifre ale lui a sau observând că $a \equiv 5 \pmod 7$). Dacă $p > 7$ este un număr prim de forma $4k + 3$, atunci din mica teoremă a lui Fermat rezultă că $7^p \equiv 7 \pmod p$, deci $a \equiv -9 \pmod p$, adică $p \mid a + 9$. Dacă a ar fi pătrat perfect, atunci p divide $a + 9 = b^2 + 3^2$ implică p divide b şi p divide 3, ceea ce nu se poate. Prin urmare, singura soluţie a problemei este $p = 3$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB \neq AC$. Fie D mijlocul laturii $[BC]$, iar E şi F proiecţiile lui D pe laturile AB, respectiv AC. Dacă M este mijlocul segmentului $[EF]$, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, demonstraţi că dreptele DM şi AO sunt paralele.

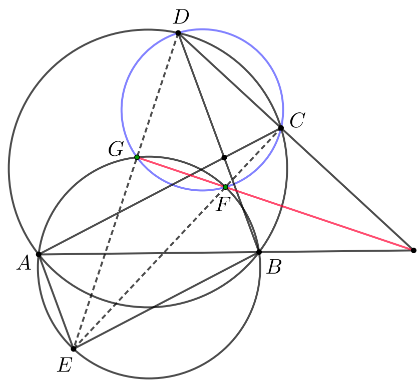
Soluţie:
Fie $\{S\} = AO \cap BC$ şi T punctul în care dreapta AD intersectează pentru a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC. Patrulaterele $ABTC$ şi $AEDF$ sunt inscriptibile, deci $\angle TBD \equiv \angle TAC \equiv \angle DEF$ şi $\angle TCD \equiv \angle TAB \equiv \angle DFE$. Rezultă că triunghiurile DEF şi TBC sunt asemenea. Atunci $\dfrac{TB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{BC/2}{EF/2} = \dfrac{BD}{EM}$. Rezultă atunci că şi triunghiurile TBD şi DEM sunt asemenea, deci $\angle EDM \equiv \angle BTD \equiv \angle ACB$, deci $m(\angle BDM) = m(\angle BDE) + m(\angle EDM) = 90^\circ - m(\angle ABC) + m(\angle ACB)$. Deoarece $m(\angle OAC) = 90^\circ - m(\angle ABC)$, rezultă că $m(\angle ASB) = m(\angle SAC) + m(\angle ACB) = 90^\circ - m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = m(\angle MDB)$, de unde rezultă că AS este paralelă cu MD.



Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Paralela prin A la BD intersectează paralela prin B la AC în punctul E. Cercul circumscris triunghiului ABE intersectează a doua oară dreptele EC şi ED în punctele F, respectiv G. Arătaţi că dreptele AB, CD şi FG sunt paralele sau concurente.

Severius Moldoveanu

Soluţie: Cum $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADB$, punctele C şi D sunt fie ambele în interiorul cercului circumscris triunghiului ABE, fie ambele pe acest cerc, fie ambele în exteriorul cercului. Avem aşadar trei cazuri: $F \in (EC)$ şi $G \in (ED)$, sau $F = C$, $G = D$ (caz în care afirmaţia din enunţ este evidentă), sau $C \in (EF)$, $D \in (EG)$. Tratăm numai primul caz, cel de-al treilea fiind analog. Avem că $m(\sphericalangle FDC) = m(\sphericalangle FDB) + m(\sphericalangle BDC) = m(\sphericalangle FEA) + m(\sphericalangle BAC) = \frac{m(AF)}{2} + m(\sphericalangle ABE) = \frac{m(AF)+m(AE)}{2} = m(\sphericalangle FGE)$, deci patrulaterul $FGCD$ este inscriptibil. Observăm că dreapta AB este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiului ABE şi patrulaterului $ABCD$, dreapta FG este axa radicală cercurilor circumscrise triunghiului ABE şi patrulaterului $FGCD$ şi dreapta CD este axa radicală a cercurilor circumscrise patrulaterului $ABCD$ şi patrulaterului $FGCD$. Ori se ştie că axele radicale a trei cercuri sunt fie paralele, fie concurente.



Problema 4. Se consideră n greutăţi, $n \geq 2$, având masele m_1, m_2, …, m_n, unde $m_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq m_k \leq k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Demonstraţi că putem aşeza greutăţile pe talerele unei balanţe astfel încât aceasta să stea în echilibru dacă şi numai dacă $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ este număr par.

Olimpiadă Estonia

Soluţia 1: Este evident că pentru ca greutăţile să poată echilibra balanţa suma maselor trebuie să fie pară (şi anume dublul sumei maselor greutăţilor dintr-un taler).
Reciproc, demonstrăm prin inducţie „tare” după n că dacă suma maselor este pară atunci greutăţile pot echilibra o balanţă. Presupunem aşadar afirmaţia adevărată pentru orice $k < n$ greutăţi având masa totală pară. Distingem două situaţii:
• dacă $m_{n-1} = m_n$, atunci $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2}$ este număr par, deci, conform ipotezei de inducţie pentru $n-2$ greutăţi, le putem aşeza pe talerele unei balanţe astfel încât aceasta să stea în echilibru. În final adăugăm cele două greutăţi de masă m_n în câte un taler al balanţei. Aceasta va rămâne în echilibru.
• Dacă $m_n \neq m_{n-1}$, în locul celor două greutăţi inventăm una fictivă de masă $m = |m_n - m_{n-1}|$. Atunci $1 \leq m \leq n-1$, iar suma celor $n-1$ greutăţi este $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} + m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 2 \cdot \min\{m_{n-1}, m_n\}$, adică pară. Din ipoteza de inducţie pentru $n-1$ greutăţi rezultă că putem aşeza aceste $n-1$ greutăţi pe talerele unei balanţe astfel încât aceasta să rămână în echilibru. Înlocuind acum greutatea de masă $|m_n - m_{n-1}|$ cu $\max\{m_{n-1}, m_n\}$ şi punând în celălalt taler greutatea de masă $\min\{m_{n-1}, m_n\}$, balanţa va fi în echilibru.
Afirmaţia este aşadar demonstrată.

Soluţia 2: Este evident că pentru ca greutăţile să poată echilibra balanţa suma maselor trebuie să fie pară (şi anume dublul sumei maselor greutăţilor dintr-un taler).
Reciproc, să presupunem că suma maselor este pară. Aşezăm greutatea de masă m_n într-unul din talerele balanţei. Modulul diferenţei dintre masele greutăţilor aşezate în cele două talere este $m_n \leq n$. În continuare aşezăm succesiv greutăţile de mase m_{n-1}, m_{n-2}, … , $m_1 = 1$ în talerul în

care suma este mai mică. (În caz că balanţa este în echilibru, aşezăm greutatea în oricare taler.) Astfel, după aşezarea grutăţii m_k, diferenţa dintre totalurile maselor în cele două talere este cel mult k. La sfârşit, procedând astfel, facem ca după aşezarea greutăţii de masă m_1, diferenţa dintre talere să fie cel mult 1. Însă suma totală a maselor fiind pară, rezultă că diferenţa este 0, ceea ce ne propusesem.