Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, Iaşi

14.02.2014

CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) Fie numărul $A = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n+2\sqrt{4n^2-1}}}, n \in N^{\star}$.
Determinaţi valoarea lui *n* pentru care $A = 10$.

b) Să se determine $x, y \in \boldsymbol{Z}$ care verifică relaţia $4x^2(y-1) - 4x - y - 1 = 0$.

Problema 2.

a) Demonstraţi că $a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow a \in [1; 2]$.

b) Dacă $a, b \in [1; 2]$, demonstraţi că $8 \leq \left(a + \frac{2}{a}\right)\left(b + \frac{2}{b}\right) \leq 9$.

Problema 3.

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Demonstraţi că $BC' \perp AB' \Leftrightarrow \frac{AC}{AA'} = \sqrt{2}$.

Problema 4.

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, aria triunghiului $A'BC'$ este egală cu $2\sqrt{3}\ cm^2$. Fie $\{Q\} = AD' \cap A'D$.

a) Demonstraţi că planele $(QA'C')$ şi $(B'AC)$ sunt paralele.

b) Calculaţi distanţa de la mijlocul muchiei DD' la planul (AQC).

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iaşi
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, Iaşi

14.02.2014

CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) Fie numărul $A = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n+2\sqrt{4n^2-1}}}$, $n \in N^*$.
Determinaţi valoarea lui n pentru care $A = 10$.

b) Să se determine $x, y \in \boldsymbol{Z}$ care verifică relaţia $4x^2(y-1) - 4x - y - 1 = 0$.

Prof. Marius Farcaş

BAREM

a) Aduce numărul la forma $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ 2p
Obţine $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} = 10$ 1p
Finalizare: $n = 220$ 1p

b) Aduce relaţia la forma $y = \frac{(2x+1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x+1}{2x-1}$ 1p
Deoarece $y \in \boldsymbol{Z}$, obţine $x \in \{0; 1\}$ 1p
Finalizare: $(x, y) \in \{(0; -1); (1; 3)\}$ 1p

Problema 2.

a) Demonstraţi că $a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow a \in [1; 2]$.

b) Dacă $a, b \in [1; 2]$, demonstraţi că $8 \leq \left(a + \frac{2}{a}\right)\left(b + \frac{2}{b}\right) \leq 9$.

BAREM

a) Observă echivalenţa $a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0$ 1p
Analizează cazurile:
Dacă $a \in [1; 2]$, atunci $(a-1)(a-2) \leq 0$ 1p
Dacă $\begin{cases} a < 1, \text{atunci } (a-1)(a-2) > 0, \text{nu convine} \\ a > 2, \text{atunci } (a-1)(a-2) > 0, \text{nu convine} \end{cases}$ 1p

b) Pentru $a, b \in [1; 2]$, deduce $a + \frac{2}{a} \leq 3$ şi $b + \frac{2}{b} \leq 3$ 1p
Obţine inegalitatea $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(b + \frac{2}{b}\right) \leq 9$ 1p
Din inegalitatea mediilor obţine $a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$ şi $b + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{2}$ 1p
Finalizare: $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(b + \frac{2}{b}\right) \geq 8$ 1p

Problema 3.

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Demonstraţi că $BC' \perp AB' \Leftrightarrow \frac{AC}{AA'} = \sqrt{2}$.

BAREM

Obţine $\sphericalangle(BC', AB') = \sphericalangle C'BM$, unde M este simetricul punctului A' faţa de B' 1p

„$\Leftarrow$" Dacă $\frac{AC}{AA'} = \sqrt{2}$, obţine că $\Delta C'BM$ este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle C'BM) = 90°$ 3p

„$\Rightarrow$" Notând $AB= l$, $AA' = h$, din $\Delta C'BM$ obţine $MC' = \sqrt{2l^2 + 2h^2}$ 1p

Din $\Delta MC'A'$, $(m(\sphericalangle MC'A') = 90°)$, obţine $MC' = l\sqrt{3}$ 1p

Finalizare: $l\sqrt{3} = \sqrt{2l^2 + 2h^2} \Leftrightarrow l = h\sqrt{2}$ 1p

Problema 4.

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, aria triunghiului $A'BC'$ este egală cu $2\sqrt{3}\ cm^2$. Fie $\{Q\} = AD' \cap A'D$.

a) Demonstraţi că planele $(QA'C')$ şi $(B'AC)$ sunt paralele.
b) Calculaţi distanţa de la mijlocul muchiei DD' la planul (AQC).

BAREM

a) $A'Q \parallel B'C$, deci $A'Q \parallel (ACB')$ 1p
$A'C' \parallel AC$, deci $A'C' \parallel (ACB')$ 1p
Finalizare: $(QA'C') \parallel (B'AC)$ 1p
b) Fie M mijlocul muchiei DD'. Observă că $d(M, (AQC)) = d(M, (ACD'))$ 1p
Construieşte $MT \perp D'O$, unde O este centrul bazei $ABCD$ 1p
Justifică: $d(M, (ACD')) = MT$ 1p
Obţine: $MT = \frac{\sqrt{3}}{3} cm$ 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro