OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
Clasa a V – a

PROBLEMA 1. La un concurs de matematică sunt propuse 30 de exerciţii. Pentru fiecare exerciţiu rezolvat corect elevul primeşte 10 puncte, iar pentru fiecare exerciţiu rezolvat greşit este penalizat cu 10 puncte (se scad 10 puncte). Dragoş a rezolvat toate exerciţiile şi a primit 80 de puncte.

a) Câte exerciţii a rezolvat corect Dragoş?

b) Câte exerciţii a rezolvat greşit Dragoş?

c) Câte exerciţii ar mai fi trebuit să rezolve corect Dragoş, pentru ca în final el să obţină 120 puncte?

d) Care a fost punctajul maxim care se putea obţine la concursul de matematică?

PROBLEMA 2. Fie numerele $x = 1+2+2^2+\ldots+2^{2014}$ şi $y = (27^3 : 3^8+10^{10} : 10^8-72)^{403}-2015^0$.

a) Arătaţi că $x = 2^{2015} - 1$;

b) Comparaţi numerele x şi y;

c) Aflaţi ultima cifră a numărului $x + y$.

PROBLEMA 3. Determinaţi câte numere de forma $\overline{abc}$, cu cifre distincte, verifică relaţia:

$$\overline{aba} - \overline{aaa} + 17\,(b-a) = c^3.$$

PROBLEMA 4. Se consideră şirul cu termenii: $1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 16,\ 17, 20, \ldots$

a) Scrieţi următorii 2 termeni ai şirului;

b) Determinaţi al 2015-lea termen al şirului;

c) Calculaţi suma termenilor mai mici sau egali cu 80 din şir.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1.

(2p) a) Dragoş a rezolvat corect 19 exerciţii;

(2p) b) Dragoş a rezolvat greşit 11 exerciţii;

(2p) c) Pentru a obţine 120 de puncte, Dragoş ar fi trebuit să rezolve corect încă 2 exerciţii;

(1p) d) Punctajul maxim care se putea obţine este $10 \times 30 = 300$ (puncte).

PROBLEMA 2.

(1p) a) $x = 2x - x = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2014} + 2^{2015}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2014}) = 2^{2015} - 1$;

(1p) b) Avem $y = 31^{403} - 1$

(1p) şi $x = 32^{403} - 1$

(1p) deci $x > y$;

(1p) c) Deoarece x este de forma $2^{4k+3} - 1$ $(k \in \mathbb{N})$, ultima cifră a lui x este $8 - 1 = 7$

(1p) Ultima cifră a lui y este $1 - 1 = 0$

(1p) Deci, ultima cifră a lui $x + y$ este 7

PROBLEMA 3.

(1p) Observăm că $b > a > 0$

(2p) Relaţia din enunţ este echivalentă cu: $10b - 10a + 17\,(b - a) = c^3$

(1p) De unde avem: $27\,(b - a) = c^3 \Rightarrow b - a$ este cub perfect

(2p) Dar, $b - a < 9 \Rightarrow b - a \in \{1, 8\} \Rightarrow c^3 \in \{3^3, 6^3\}$

(1p) Astfel, $\overline{abc} \in \{123, 453, 563, 673, 783, 893, 196\}$, adică sunt 7 numere.

PROBLEMA 4.

(2p) Se observă că

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	...
$2 \cdot 1 - 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3 - 1$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5 - 1$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 7 - 1$	$2 \cdot 8$	...

adică, termenii şirului sunt de forma:

- dacă n este impar, atunci $T_n = 2n - 1$
- dacă n este par, atunci $T_n = 2n$

(2p) a) Următorii 2 termeni ai şirului sunt: 21 şi 24

(1p) b) Termenul al 2015-lea este $T_{2015} = 2 \cdot 2015 - 1 = 4029$

(2p) c) Numărul 80 este termen al şirului, $T_{40} = 2 \cdot 40 = 80$, iar suma cerută este:

$$S = 1 + 4 + 5 + 8 + \cdots + 77 + 80 = (1 + 5 + 9 + \cdots + 77) + (4 + 8 + \cdots + 80) =$$

$$= 78 \cdot 10 + 4\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 20) = 780 + 2 \cdot 20 \cdot 21 = 1620$$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.