MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
SUBIECTE clasa a VIII-a

1. **a)** Arătaţi că dacă $a, b > 0$ atunci $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b}{2}$.

RMT

b) Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$, atunci

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geq a+b+c.$$

Când are loc egalitatea în cele două inegalităţi de mai sus?

2. Calculaţi suma $\frac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \cdots + \frac{1}{2[\sqrt{99}]+1}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie $AB = 1\,cm$, M, N centrele feţelor $ABB'A'$, respectiv $BCC'B'$.

a) Arătaţi că dreptele MN şi BD sunt perpendiculare.

b) Calculaţi aria patrulaterului $ANC'D'$.

c) Dacă planul (CMD) intersectează dreapta BC' în punctul P, iar Q este mijlocul lui $[BC]$, arătaţi că punctele P, Q şi B' sunt coliniare.

4. Pe o dreaptă se consideră, în ordine, punctele A, B, C, D astfel încât $AB = BC$. Perpendiculara în punctul B pe dreapta AD intersectează cercul de diametru $[AD]$ în punctele P şi Q, iar perpendiculara în punctul C pe dreapta AD intersectează cercul de diametru $[BD]$ în punctele K şi L. Demonstraţi că punctele P, K, L şi Q se află pe un cerc al cărui centru este punctul B.

Notă

- Timp de lucru efectiv: 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

succes !

- Prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar pentru matematică – I.Ş.J. Timiş
- Lector.dr. Mihai Chiş-preşedinte S.S.M.R. – Filiala Timiş

Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş	Ministerul Educaţiei Naţionale	Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 21.02.2014

Clasa a VIII-a

1. a) Arătaţi că dacă $a, b > 0$ atunci $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$.

RMT

b) Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$, atunci

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant a+b+c.$$

2. Calculaţi suma $\dfrac{1}{2[\sqrt{1}]+1}+\dfrac{1}{2[\sqrt{2}]+1}+\cdots+\dfrac{1}{2[\sqrt{99}]+1}$,
unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie $AB = 1\,\text{cm}$, M, N centrele feţelor $ABB'A'$, respectiv $BCC'B'$.
a) Arătaţi că dreptele MN şi BD sunt perpendiculare.
b) Calculaţi aria patrulaterului $ANC'D'$.
c) Dacă planul (CMD) intersectează dreapta BC' în punctul P, iar Q este mijlocul lui $[BC]$, arătaţi că punctele P, Q şi B' sunt coliniare.

4. Pe o dreaptă se consideră, în ordine, punctele A, B, C, D astfel încât $AB = BC$. Perpendiculara în punctul B pe dreapta AD intersectează cercul de diametru $[AD]$ în punctele P şi Q, iar perpendiculara în punctul C pe dreapta AD intersectează cercul de diametru $[BD]$ în punctele K şi L. Demonstraţi că punctele P, K, L şi Q se află pe un cerc al cărui centru este punctul B.

Notă

- Timp de lucru efectiv: 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

1. a) Arătaţi că dacă $a, b > 0$ atunci $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$.

RMT

b) Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$, atunci
$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant a+b+c.$$

Când are loc egalitatea în cele două inegalităţi de mai sus?

Soluţie şi barem:

a) Numitorii fiind pozitivi, inegalitatea se scrie echivalent $2(a^3+b^3) \geqslant (a+b)(a^2+ab+b^2)$, adică $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \geqslant 0$, sau încă $(a^2-b^2)(a-b) \geqslant 0$, adică $(a-b)^2(a+b) \geqslant 0$, inegalitate evident adevărată. **4p**

b) Scriind inegalitatea de la punctul **a)** pentru a, b, pentru b, c şi pentru c, a şi adunând relaţiile obţinute, se obţine inegalitatea de la **b)**. **1p**

În inegalitatea de la **a)** se vede că avem egalitate dacă $a = b$. **1p**

Pentru a avea egalitate la inegalitatea de la **b)**, trebuie să avem egalitate în fiecare din cele trei inegalităţi din a căror adunare a rezultat aceasta, deci trebuie ca $a = b = c$. **1p**

2. Calculaţi suma $\dfrac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \dfrac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \cdots + \dfrac{1}{2[\sqrt{99}]+1}$,
unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Soluţie şi barem:

Observăm că primele 3 fracţii sunt egale cu $\dfrac{1}{3}$, următoarele 5 fracţii sunt egale cu $\dfrac{1}{5}$. În general, putem observa că $\dfrac{1}{2[\sqrt{k}]+1} = \dfrac{1}{2n+1}$ pentru orice k pentru care $[\sqrt{k}] = n$, adică $n \leqslant \sqrt{k} < n+1$, ceea ce revine la $n^2 \leqslant k \leqslant n^2+2n$. Prin urmare egalitatea $\dfrac{1}{2[\sqrt{k}]+1} = \dfrac{1}{2n+1}$ are loc pentru $2n+1$ numere (şi anume n^2, $n^2+1, \ldots, n^2+2n$). Putem grupa fracţiile corespunzătoare acestor $2n+1$ numere; suma fracţiilor din fiecare grup este aşadar 1. Vom avea 9 asemenea grupuri, corespunzătoare valorilor $n = 1, 2, \ldots, 9$. În concluzie, vom avea:
$$\frac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \cdots + \frac{1}{2[\sqrt{99}]+1} = \underbrace{\frac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{3}]+1}}_{=1} +$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2[\sqrt{4}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{5}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{6}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{7}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{8}]+1}}_{=1} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2[\sqrt{81}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{82}]+1} + \ldots + \frac{1}{2[\sqrt{99}]+1}}_{=1} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{de 9 ori}} = 9. \quad \ldots\ldots\ldots \ \mathbf{7p}$$

Observaţie: (punctaje parţiale)
Orice procedură de calcul care permite calcularea rezultatului final trebuie punctată în funcţie de progresul realizat, fie că ea se bazează pe gruparea din soluţia de mai sus, fie că explicitează termenii sumei unul câte unul.
Pentru calculul câtorva termeni din şir se va acorda **1p**.
Pentru observaţia că termenii se repetă şi intuirea corectă a numărului de repetări (fără calculul sumei) se vor acorda **3p**.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie $AB = 1\,\text{cm}$, M, N centrele feţelor $ABB'A'$, respectiv $BCC'B'$.
a) Arătaţi că dreptele MN şi BD sunt perpendiculare.
b) Calculaţi aria patrulaterului $ANC'D'$.
c) Dacă planul (CMD) intersectează dreapta BC' în punctul P, iar Q este mijlocul lui $[BC]$, arătaţi că punctele P, Q şi B' sunt coliniare.

Soluţie şi barem:
a) $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul $B'AC$, deci $MN \parallel AC$. Cum $AC \perp BD$, rezultă că $MN \perp BD$. **2p**
b) Deoarece $ABC'D'$ este dreptunghi, $ANC'D'$ este un trapez dreptunghic; aria sa va fi $\dfrac{(AD' + NC')C'D'}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 1}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ (cm^2).................. **2p**
c) Fie S mijlocul lui $[BB']$. Atunci $MS \parallel CD$, deci $S \in (CMD)$. Rezultă că punctul P este intersecţia dreptelor CS şi BN. Cum acestea sunt mediane în triunghiul BCB', P este centrul de greutate al acestui triunghi, deci $P \in B'Q$... **3p**

4. Pe o dreaptă se consideră, în ordine, punctele A, B, C, D astfel încât $AB = BC$. Perpendiculara în punctul B pe dreapta AD intersectează cercul de diametru $[AD]$ în punctele P şi Q, iar perpendiculara în punctul C pe dreapta AD intersectează cercul de diametru $[BD]$ în punctele K şi L. Demonstraţi că punctele P, K, L şi Q se află pe un cerc al cărui centru este punctul B.

Soluţie şi barem:
Deoarece subîntind diametrul $[AD]$, unghiurile $\sphericalangle APD$ şi $\sphericalangle AQD$ sunt drepte. Analog, deoarece subîntind diametrul $[BD]$, unghiurile $\sphericalangle BKD$ şi $\sphericalangle BLD$ sunt şi ele unghiuri drepte.. **2p**
Trebuie să demonstrăm că $BP = BQ = BL = BK$. Din teorema înălţimii în triunghiurile dreptunghice APD şi AQD, avem $BP^2 = AB \cdot BD = BQ^2$...... **2p**
Din teorema catetei în triunghiurile dreptunghice BKD şi BLD, avem $BK^2 = BC \cdot BD = BL^2$.. **2p**

Dar cum $BA = BC$, avem $BP^2 = BQ^2 = BA \cdot BD = BC \cdot BD = BK^2 = BL^2$, de unde $BP = BQ = BK = BL$ şi concluzia. **1p**
Observaţie:
Argumente analoage pot fi formulate în termeni de triunghiuri asemenea sau de puterea punctului faţă de un cerc. Invocarea acestor argumente va fi punctată echivalent cu baremul de mai sus.