OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XI-a

Subiectul I

Fie $A,\ B \in M_2(\mathbf{Q})$ astfel încât $AB = BA$, $\det A = -3$ și $\det\left(A + \sqrt{3}\cdot B\right) = 0$.

Calculați $\det\left(A^2 + B^2 - AB\right)$.

Gazeta Matematică

Subiectul II

Fie $A,\ B \in M_2(\mathbf{C})$. Demonstrați echivalența:

$$\det(A+B)\cdot\det(A-B) = \det\left(A^2 - B^2\right) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2 .$$

Nelu Chichirim

Subiectul III

a) Fie $a > 0$ și șirurile $(x_n)_{n\ge1}$, $(y_n)_{n\ge1}$ cu $x_n,\ y_n \in [0,\ a]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Se știe că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a^2$. Arătați că șirurile $(x_n)_{n\ge1}$ și $(y_n)_{n\ge1}$ sunt convergente.

b) Dacă $x_n,\ y_n \in (-1,\ 1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$, rezultă că șirurile $(x_n)_{n\ge1}$ și $(y_n)_{n\ge1}$ sunt convergente?

Dorin Arventiev

Subiectul IV

Fie $(x_n)_{n\ge1}$ și $(y_n)_{n\ge1}$ două șiruri de numere reale definite astfel:

$$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{(1+x_n)^2}, \forall n \ge 1$$

$$y_n > 0,\ y_{n+1} \le \frac{y_n}{(1+y_n)^2}, \forall n \ge 1$$

a) Arătați că șirurile $(x_n)_{n\ge1}$ și $(y_n)_{n\ge1}$ sunt convergente și determinați limitele lor.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^n = \sqrt{e}$.

c) Arătați că șirul $(ny_n)_{n\ge1}$ este mărginit.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Fie $A,\ B \in M_2(\mathbf{Q})$ astfel încât $AB = BA$, $\det A = -3$ și $\det\left(A + \sqrt{3}\cdot B\right) = 0$.

Calculați $\det\left(A^2 + B^2 - AB\right)$.

Gazeta Matematică

Soluție

$P(x) = \det(A + xB) \Rightarrow P(x) = x^2 - 3$ **4p**

Fie $\varepsilon \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1$.. **1p**

$AB = BA \Rightarrow A^2 + B^2 - AB = (A + \varepsilon B)\left(A + \varepsilon^2 B\right) = P(\varepsilon)P(\varepsilon^2)$ **1p**

$P(\varepsilon)P(\varepsilon^2) = 13$ **1p**

Subiectul II

Fie $A,\ B \in M_2(\mathbf{C})$. Demonstrați echivalența:

$$\det(A+B)\cdot\det(A-B) = \det\left(A^2 - B^2\right) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$$

Nelu Chichirim

Soluție

$\det(A+B)\det(A-B) = \det\left((A+B)(A-B)\right) = \det\left(A^2 - B^2 - AB + BA\right)$

$\det(A-B)\det(A+B) = \det\left((A-B)(A+B)\right) = \det\left(A^2 - B^2 + AB - BA\right)$ **2p**

Prin adunare şi folosind $\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2\left(\det X + \det Y\right)$ obţinem

$2\det(A+B)\det(A-B) = 2\left(\det\left(A^2 - B^2\right) + \det(AB - BA)\right)$

adică $\det(A+B)\det(A-B) = \det\left(A^2 - B^2\right) + \det(AB - BA)$ **2p**

Cum $Tr(AB - BA) = 0$ şi $(AB - BA)^2 - Tr(AB - BA)\cdot(AB - BA) + \det(AB - BA)\cdot I_2 = O_2$, avem

$\det(A+B)\cdot\det(A-B) = \det\left(A^2 - B^2\right) \Leftrightarrow \det(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2$ **3p**

Subiectul III

a) Fie $a > 0$ și șirurile $(x_n)_{n\ge1}$, $(y_n)_{n\ge1}$ cu $x_n,\ y_n \in [0,\ a]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Se știe că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a^2$. Arătați că șirurile $(x_n)_{n\ge1}$ și $(y_n)_{n\ge1}$ sunt convergente.

b) Dacă $x_n,\ y_n \in (-1,\ 1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$, rezultă că șirurile $(x_n)_{n\ge1}$ și $(y_n)_{n\ge1}$ sunt convergente?

Dorin Arventiev

Soluție

a) Din $\dfrac{x_n y_n}{a} \le x_n \le a,\ \forall n \ge 1 \Rightarrow x_n \to a$. Analog pentru (y_n).. **4p**

b) Fie $x_n = y_n = (-1)^n + (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n} = (-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)$, evident divergente dar $x_n y_n \to 1$ **3p**

Subiectul IV

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale definite astfel:

$$x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{x_n}{(1+x_n)^2},\forall n\geq 1$$

$$y_n>0,\ y_{n+1}\leq\frac{y_n}{(1+y_n)^2},\forall n\geq 1$$

a) Arătați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente și determinați limitele lor.

b) Arătați că $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^n=\sqrt{e}$.

c) Arătați că șirul $(ny_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Cătălin Zîrnă

Soluție

a) Prin inducţie, $x_n>0,\ \forall n\geq 1$. Din $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1\ \forall n\geq 1$, avem că şirul este strict descrescător. Trecând la limită, obţinem $x_n\to 0$. Analog (y_n) **3p**

b) $nx_n=\frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Cum $\frac{1}{x_n}\to+\infty$, strict crescător, aplicăm Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow nx_n\to\frac{1}{2}$

$(1+x_n)^{x_n}\overset{1^\infty}{=}\left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{nx_n}\to e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ **2p**

c) $y_n>0,\ y_n\to 0\Rightarrow(\exists)k\in\mathbf{N}$ *aî* $y_k\in(0,1)$

Alegem șirul $(a_n)_{n\geq k}$ astfel: $a_k\in(y_k,1),\ a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2},\forall n\geq k$. Cu demonstrație analoagă pentru șirul (x_n), se arată că $a_n\to 0$ strict descrescător și $na_n\to\frac{1}{2}$.

Demonstrăm, prin inducție, că $y_n<a_n,\ \forall n\geq k$:

$y_k<a_k$ este adevărată și din $y_{n+1}-a_{n+1}\leq\frac{y_n}{(1+y_n)^2}-\frac{a_n}{(1+a_n)^2}=\frac{(y_n-a_n)(1-y_na_n)}{(1+y_n)^2(1+a_n)^2}$ avem că din $y_n<a_n\Rightarrow y_{n+1}<a_{n+1}$.

Cum $0<ny_n<na_n,\ \forall n\geq k$ și (na_n) este convergent, deci mărginit, deducem că (ny_n) este mărginit.
.... **2p**