

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA PE LOCALITATE**  
**14.02.2015**  
**Clasa a XI –a M2**

**Problema 1 .**

Rezolvați ecuația  $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1-x \\ x+1 & 1-x & 1 \\ 1-x & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$  .

**Problema 2 .**

Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  , astfel încât :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$  .

**Problema 3 .**

Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  .

- a) (3p) Determinați  $A^{2015}$  .  
b) (4p) Rezolvați ecuația  $X^5 = A$  ,  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  .

**Problema 4 .**

Determinați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{ax+3}{x-1} \right)^{2x-1}$  , pentru  $a > 0$

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**Pentru fiecare problema se acordă de la 0 la 7 puncte .**

## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -14.02.2015

Barem de notare

Clasa a XI-a M2

**Problema 1.**

Calculul determinantului	.....	3p
Rezolvarea ecuației	.....	3p
Finalizare	.....	1p

**Problema 2.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1-ax^2-bx-ax-b}{x+1} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2(1-a)-x(b+a)+1}{x+1} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$(1-a) = 0, -(b+a) = 1 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Finalizare}, a = 1, b = -2 \quad \dots\dots\dots 2p$$

**Problema 3.**

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Demonstrăm ca } A^n = 3^{n-1}A \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare} \quad \dots\dots\dots 1p$$

b)

$$A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = 3A \cdot 3A \cdot A = 3 \cdot 3 \cdot A^2 \cdot A = 3^4 A \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$A^5 = 3^4 A \Rightarrow A = \frac{1}{3^4} A^5 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$X^5 = A \Rightarrow X^5 = \frac{1}{3^4} A^5 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$X = \frac{1}{\sqrt[5]{3^4}} A \quad \dots\dots\dots 1p$$

**Problema 4.**

$$\text{Dacă } a \in (0, 1) \text{ limita este egală cu } 0 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } a \in (1, +\infty) \text{ limita este egală cu } +\infty \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } a = 1 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{ax+3}{x-1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x+3}{x-1} - 1 \right)^{2x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + x + 3 - x + 1x - 12x - 1 = e^8$$

$$\dots\dots\dots 3p$$