Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a XII-a

Problema 1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $"\circ"$ prin

$x \circ y = 3 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 6 \cdot y + 10.$

a) Să se determine numărul real a astfel încât legea de compoziţie $"\circ"$ defineşte pe mulţimea $\mathbb{R} - \{a\}$ o structură de grup abelian.

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, unde $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{x \text{ de } n \text{ ori}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât (m, ∞) să fie parte stabilă în raport cu legea $"\circ"$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie şirul cu termenul general $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot \left(tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x\right) dx,\ n \geq 1.$

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \left(\sqrt[n^2]{n \cdot I_n} - 1\right).$

G. M. nr. 12/2013

Problemă selectată de Vasile Dumbravă, profesor Galaţi

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se demonstreze că dacă

$m,\ n \in \mathbb{N}^*,\ (m, n) = 1,$ astfel încât $(xy)^m = (yx)^m, (\forall) x, y \in G$ şi $(xy)^n = (yx)^n, (\forall) x, y \in G,$ atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Problemă selectată deViorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 4. Să se calculeze $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx,\ x \in [0, 2\pi].$

Problemă selectată de Alina Ciubotariu, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$a)\ x\circ y=3\cdot x\cdot y+6\cdot x+6\cdot y+10 \Leftrightarrow x\circ y=3\cdot(x+2)\cdot(y+2)-2.$ Legea "$\circ$" este asociativă şi comutativă(se verifică efectiv). Element neutru: $x\circ e=x \Leftrightarrow 3xe+6x+6e+10=x \Leftrightarrow 3xe+5x+6e+10=0 \Leftrightarrow$ $x\cdot(3e+5)+2\cdot(3e+5)=0 \Rightarrow e=\frac{-5}{3}.$ Elemente simetrizabile: $3\cdot(x+2)\cdot(x'+2)-2=-\frac{5}{3} \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x'+2)=\frac{1}{9};$ $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2;$ Atunci $x'=-2+\frac{1}{9\cdot(x+2)};$ Rezultă $a=$-2.	**1p** **2p**
	$b)\ x\circ x = 3\cdot(x+2)^2-2;$ $x\circ x\circ x=3^2\cdot(x+2)^3-2;$ . . . $x^{(n)}=3^{n-1}\cdot(x+2)^n-2,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$ Se demonstrează prin inducţie matematică $x^{(n)}=3^{n-1}\cdot(x+2)^n-2,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$	**1p** **1p**
	$c)$ Fie A=(m,∞) parte stabila în raport cu legea "$\circ$"; Din x, y>m$\Rightarrow$ $x\circ y$>m.	**1p**

	Fie şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $x_n > m,\ y_n > m,\ x_n \to m,\ y_n \to m;$ $3\cdot x_n\cdot y_n+6\cdot x_n+6\cdot y_n+10>m.$ Trecând la limită $\Rightarrow 3m^2+11m+10\geq 0 \ \Rightarrow m\in(-\infty,-2]\cup\left[-\frac{5}{3},\infty\right);$ I. $m<-2$. Fie y=0, $x=-2+\frac{m+2}{2}>m;$ $x\circ y=6\cdot\frac{m+2}{2}-2=3m+4>m\Rightarrow m>-2(\,fals).$ II. $m=-2$, atunci $x>-2$, $y>-2\Rightarrow$ $x\circ y=3\cdot(x+2)\cdot(y+2)-2>-2(\text{adevărat})\Rightarrow m=-2$ *convine.* III. $m\geq-\frac{5}{3},$ atunci fie $x,y>m\Rightarrow x+2>m+2\geq\frac{1}{3};\ y+2>m+2\geq\frac{1}{3}\Rightarrow$ $3(x+2)(y+2)-2>3(m+2)^2-2;$ Să demonstrăm că $3(m+2)^2-2\geq m\Leftrightarrow 3m^2+11m+10\geq 0(A)$ pentru că $m\in\left[-\frac{5}{3},\infty\right).$ Deci $m\in\left[-\frac{5}{3},\infty\right)$*convine.* Soluţia este $m\in\{-2\}\cup\left[-\frac{5}{3},\infty\right).$	**2p**

2.	$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot\left(tg^{n-1}x+tg^n x+tg^{n+1}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^{n-1}x\cdot\left(1+tgx+tg^2x\right)dx=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^{n-1}x\cdot\left(1+tg^2x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^n xdx=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^{n-1}x\cdot\left(tgx\right)' dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^n xdx=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(tg^n x\right)' dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^n xdx=$ $\frac{1}{n}\cdot e^{nx}\cdot tg^n x\ \Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} n\cdot e^{nx}\cdot tg^n xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\cdot tg^n xdx=\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{n\pi}{4}}$.	**4p**
	$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt[n^2]{n\cdot I_n}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{4n}}-1}{\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.	**3p**
3.	Din $(m,n)=1\Rightarrow(\exists)\ p,q\in\mathbb{N}$ astfel încât m · p-n · q=1;	**3p**
	x · y=$(xy)^{\mathrm{m\cdot p-n\cdot q}}=(xy)^{\mathrm{m\cdot p}}\cdot(xy)^{\mathrm{-n\cdot q}}=\left((xy)^m\right)^p\cdot\left((xy)^n\right)^{-p}=$ $\left((yx)^m\right)^p\cdot\left((yx)^n\right)^{-p}$ $=(yx)^{m\cdot p}\cdot(yx)^{-np}=(yx)^{m\cdot p-n\cdot q}=yx;$ $x\cdot y=y\cdot x\Rightarrow(G,\circ)$ este grup abelian.	**4p**
4.	Funcţia $f(x)=\frac{1}{2+\sin x},\ x\in[0,2\pi]$ este continuă pe $[0,2\pi]\Rightarrow$ f admite primitive pe $[0,2\pi]$.	**1p**

	Nu se poate folosi substituţia $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ deoarece pentru $x=\pi\in[0,2\pi]$, $tg\frac{x}{2}$ nu este definită. Vom construi o primitivă a funcţiei f pe J, J interval, $J=[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]$. Fie $G:J\to\mathbb{R}$, J interval, $J\subset[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]$, o primitivă a funcţiei f. Facem substituţia $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$. Integrala asociată este $\mathrm{I}_1=\int\frac{1+t^2}{2t^2+2t+2}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t^2+t+1}dt=\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=$ $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C;$ Fie $G(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}},\ x\in J;$	**3p**
	Construim o primitivă $F:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ a lui f pe $[0,2\pi]$, de forma $F(x)=\begin{cases}G(x), & x\in[0,\pi)\\ k', & x=\pi\\ G(x)+k, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ Pentru determinarea legăturii dintre constantele k şi k′ se impune condiţia de continuitate a funcţiei F în $x=\pi$. Funcţia F este continuă în $x=\pi\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}}F(x)=F(\pi)\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+k=k'\Rightarrow k=\frac{2\pi}{\sqrt{3}};k'=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$ $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}, x\in[0,\pi)\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, x=\pi\\ \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ $\int\frac{1}{2+\sin x}dx=F(x)+C,\ x\in[0,2\pi].$	**3p**