OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1. a) Demonstrati ca pentru orice a,b,x,y strict positive avem

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

b) Fie x,y,z>0 cu $2xyz=1$.Demonstrati ca

$$\frac{xy^2}{x^3+1}+\frac{yz^2}{y^3+1}+\frac{zx^2}{z^3+1}\geq 1.$$

Olimpiada Rusia 2012

*PROBLEMA 2.*Fie a,b reale positive astfel incat ecuatiile

$$(a+b-x)^2=a-b,\ \text{cu radacinile reale } x_1<x_2$$

$$(ab+1-x)^2=ab-1\ \text{,cu radacinile reale } x_3<x_4.$$

Demonstrati ca daca radacinile x_2, x_4 sunt egale,atunci si radacinile x_1, x_3 sunt egale.

Olimpiada Bulgaria

*PROBLEMA 3.*Se considera pentagonul convex ABCDE si se noteaza cu M,N,P,Q,R mijloacele laturilor AB,BC,CD,DE,EA iar cu A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 mijloacele segmentelor NQ,PR,QM,RN,MP. Sa se arate ca:

a) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{EE_1}=0.$

b)Raportul ariilor pentagoanelor $A_1B_1C_1D_1E_1$ si ABCDE este $\frac{1}{16}$.

Prof. univ.Vasile Pop

PROBLEMA 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere reale cu $a_1=a_2=1$ si

$$a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{3^n}, n\geq 1.$$

Sa se arate ca $a_n<2,$ oricare ar fi n ≥ 1.

G.M./11-2012

Subiect selectat de Inspector de specialitate, prof. Gheorghe Ciucă

NOTA: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza cu puncte de la 0 la 7.

Barem clasa a IX-a

Problema 1.

a) $(a+b)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)=x^2+y^2+\frac{a}{b}y^2+\frac{b}{a}x^2\geq (x+y)^2$ (2p)

b)Membrul se scrie $\frac{y^2}{x^2+\frac{1}{x}}+\frac{z^2}{y^2+\frac{1}{y}}+\frac{x^2}{z^2+\frac{1}{z}}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ (3p)

Folosind conditia 2xyz=1 rezulta cerinta problemei.(2p)

Problema 2

Conditii de existenta : $a\geq b; ab\geq 1$ (1p)

Rezolvarea ecuatiilor: $\begin{matrix} x_{1,2}=a+b\pm\sqrt{a-b} \\ x_{3,4}=ab+1\pm\sqrt{ab-1}\end{matrix}$ (2p)

Conditia problemei $x_2=x_4\Leftrightarrow b=1$ si $a>1$(3p)

Finalizare $x_1=x_3$.(1p)

Problema3

Pentru orice punct X din plan notam cu $\overrightarrow{r_X}$ vectorul de pozitie asociat. Avem

$\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}, etc$ (1p) si $\overrightarrow{r_{A_1}}=\frac{\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}}{4}$ si analoage (1p)

a) Scriem $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{r_{A_1}}-\overrightarrow{r_A}=\frac{\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}-4\overrightarrow{r_A}}{4}$,etc si verifica ca suma vectoriala este 0. (2p)

b) $\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$, deci $A_1B_1=\frac{1}{4}AB$.(1p)

Pentagoanele au laturile paralele si finalizare . (2p)

Problema 4

Calculeaza $a_3=\frac{4}{3}=2-\frac{18}{3^3}$ (1p)

Inductie matematica : $P(n): a_n<2-\frac{18}{3^n}$ (6p)