OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală

Clasa a VIII- a

16 februarie 2014

SUBIECTUL I

3p **1.** Dacă a, b, c sunt numere reale, calculaţi valoarea minimă a expresiei:

$E = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$

4p **2.** Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $\frac{a+b+c}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$, arătaţi că triunghiul este echilateral.

SUBIECTUL II

1. Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care:

2p **a)** numărul $\sqrt{x^2-13}$ este raţional;

2p **b)** numărul $\sqrt{x^2-13x}$ este raţional;

3p **2.** Numerele reale a şi b verifică egalităţile $a+b = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 2014$.

Calculaţi $\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$ şi $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2}$.

SUBIECTUL III

7p **1.** Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale a, b, c, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2}+\sqrt{(c+1)^2+(a+1)^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c+3).$$

Gazeta Matematică, Nr. 11/2013

SUBIECTUL IV

ABCDEFGH este prismă patrulateră regulată cu AB = 8 cm şi AE = 4 cm, iar M este mijlocul muchiei (EH).

3p **a)** Demonstraţi că dreapta AM este perpendiculară pe dreapta MC.

2p **b)** Aflaţi lungimea segmentului (FN) ştiind că $(ACM) \cap FG = \{N\}$.

2p **c)** Aflaţi tangenta unghiului dintre planele (ABD) şi (ACM).

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – FAZA LOCALĂ – 16.02.2014

BAREM DE CORECTARE CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

1. Dacă a, b, c sunt numere reale, calculaţi valoarea minimă a expresiei:
E = $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

2. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $\frac{a+b+c}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$, arătaţi că triunghiul este echilateral.

Soluţie:

1. $2E = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 1p
$(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(c-a)^2 \geq 0$ pentru orice a, b şi c 1p
Valoarea minimă este 0 .... 1p
2. $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$ 1p
Obţinerea formei $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 2p
Finalizare 1p

SUBIECTUL II

1. Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care:
a) numărul $\sqrt{x^2-13}$ este raţional;
b) numărul $\sqrt{x^2-13x}$ este raţional;

2. Numerele reale a şi b verifică egalităţile $a+b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2014$.

Calculaţi $\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2}$ şi $\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2}$.

Soluţie:

a) $\sqrt{x^2-13} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x^2 - 13 = a^2$, $a \in \mathbf{Z}$, de unde $(x-a)(x+a) = 13$ 1p
Analizând toate posibilităţile se obţine $x \in \{-7; 7\}$ 1p
b) $\sqrt{x^2-13x} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x^2 - 13x = a^2$, $a \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 4x^2 - 4 \cdot 13x = 4a^2 \Leftrightarrow (2a-13)^2 =$
$=4a^2 + 169 \Leftrightarrow (2x - 13 - 2a)(2x - 13 + 2a) = 169$ 1p
Obţinem $x \in \{-36; 0; 13; 49\}$ 1p
c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{2014}{ab} = 2014 \Rightarrow ab = 1$ 1p
$\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab}} = 2014$ 1p
$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{(ab)^2}} = a^2 + b^2 = 2014^2 - 2$ 1p

SUBIECTUL III

1. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale *a*, *b*, *c*, are loc inegalitatea:
$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2}+\sqrt{(c+1)^2+(a+1)^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c+3)$.

Soluţie:

a) Utilizăm inegalitatea $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ 1p
Pentru *x* şi *y* pozitive inegalitatea arată că media pătratică a celor două numere este cel puţin egală cu media lor aritmetică.
Dacă $x + y$ este negativ inegalitatea este evidentă 1p
Pentru $x + y \geq 0$, prin ridicare la pătrat şi efectuarea calculelor se obţine forma echivalentă $(x - y)^2 \geq 0$ 1p
Aplicarea inegalităţii pentru fiecare termen al membrului stâng 2p
Însumarea relaţiilor şi finalizarea 2p

SUBIECTUL IV

ABCDEFGH este prismă patrulateră regulată cu $AB = 8$ cm şi $AE = 4$ cm, iar *M* este mijlocul muchiei (*EH*).
a) Demonstraţi că dreapta *AM* este perpendiculară pe dreapta *MC*.
b) Aflaţi lungimea segmentului (*FN*) ştiind că $(ACM) \cap FG = \{N\}$.
c) Aflaţi tangenta unghiului dintre planele (*ABD*) şi (*ACM*).

Soluţie:

a) Din teorema lui Pitagora obţinem: $AM = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{2}$ şi $MC = 4\sqrt{6}$ iar din teorema reciprocă a teoremei lui Pitagora obţinem că triunghiul *AMC* este dreptunghic în *M* 3p
b) Notăm $(AMC) \cap (EFH) = d$. Se obţine $d \parallel AC \parallel EG$ şi cum $EM \parallel GN$ rezultă *MNGE* este paralelogram. FN = 12 cm 2p
c) Fie $MP \parallel EA$ şi cum $EA \perp (ABD)$, se obţine $MP \perp (ABD)$ şi MP = 4 cm 1p
Dacă $PQ \perp AC$ se deduce că unghiul plan corespunzător unghiului diedru este *MQP*.
Tangenta unghiului dintre planele (*ABD*) şi (*ACM*) are valoarea $\sqrt{2}$ 1p