

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

23 februarie 2014

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix}$ și $tr(A) = 9$.

(S-a notat cu $tr(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X , $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

G.M. nr.12/2013

Problemă selectată de Alina Țepeș, profesor, Galați

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că $1 < \log_{n^2+3n+1} (n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)) < 2$.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \right\}$.

(s-a notat cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a).

Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 3. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+n \cdot a_n}$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} \right)$.

G.M. nr. 5/2013

Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 4.

a) Dacă există $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ și $A^k = O_2$, atunci $A^2 = O_2$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $f(x) = x^n$ să fie o funcție surjectivă.

Constantin Ursu, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

23 februarie 2014

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

| Nr. problemei | Soluție, rezolvare | Punctaj |
|---------------|---|---------|
| 1. | $\det(A^3) = 216;$ $\det(A^3) = (\det A)^3 = 6^3 \Rightarrow \det A = 6;$ | 2p |
| | <i>Teorema Hamilton – Cayley</i> : $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2, (\forall) A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$ $A^2 - 9 \cdot A + 6 \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^3 = 9 \cdot A^2 - 6 \cdot A = 75 \cdot A - 54 \cdot I_2 \Rightarrow 75 \cdot A = A^3 + 54 \cdot I_2 \Rightarrow$ | 3p |
| | $75 \cdot A = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow 75 \cdot A = \begin{pmatrix} 525 & 600 \\ 75 & 150 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$ | 2p |
| 2. | $1 < \log_{n^2+3n+1} (n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)) < 2 \Leftrightarrow$ $n^2 + 3n + 1 < n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) < (n^2 + 3n + 1)^2 \quad (1)$ Observând că $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 \Rightarrow$ inegalitatea (1) este adevărată. | 3p |
| | Din a) rezultă că $\{\log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\} = \log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) - 1 =$ $\log_{n^2+3n+1} [(n^2 + 3n + 1)^2 - 1] - 1;$ | 2p |
| | Notând $n^2 + 3n + 1 = m \rightarrow \infty$, obținem: $\lim_{m \rightarrow \infty} [\log_m (m^2 - 1) - 1] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{m^2 - 1}{m}}{\ln m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln m + \ln \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{\ln m} = 1.$ | 2p |
| 3. | $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n \cdot a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n, n \geq 1;$ | 2p |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| | $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 1 \\ \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = 2 \\ \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} = 3 \\ \dots \\ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{n^2 - n + 2}{2};$ $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (k^2 - k + 2)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (k^3 - k^2 + 2 \cdot k) =$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{2 \cdot n \cdot (n+1)}{2} \right);$ | 3p |
| | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} \right) =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{2 \cdot n \cdot (n+1)}{2} \right) = \frac{1}{8}$ | 2p |
| 4. | <p>a) Dacă $A^k = O_2 \Rightarrow (\det A)^k = 0 \Rightarrow \det A = 0$. După Hamilton-Cayley avem $A^2 - \alpha \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2 \rightarrow A^2 = \alpha A$. Se arată prin inducție matematică că $A^k = \alpha^{k-1} \cdot A$. Din $A^k = O_2$ rezultă că $\alpha = 0$ sau $A = O_2$ și în fiecare caz $A^2 = O_2$.</p> | 4p |

| | | |
|--|--|-----------|
| | <p>b) $f(x) = x, f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este surjectivă.</p> <p>Presupunem prin reducere la absurd că:</p> <p>$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), f(x) = x^n$, cu $n \geq 2$ ar fi surjectivă. Deci</p> <p>pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât</p> <p>$X^n = A \Rightarrow X^{2n} = A^2 = O_2$.</p> <p>Dacă $X^{2n} = O_2$ rezultă că $X^2 = O_2$. Dacă</p> <p>$X^2 = O_2 \Rightarrow X^n = O_2 \Rightarrow A = O_2$, contradicție. Deci răspunsul este $n = 1$.</p> | 3p |
|--|--|-----------|