Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş

Clasa a VII-a

**1.** Fie numerele raţionale $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}$ şi $b=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$.

**a)** Calculaţi media aritmetică a numerelor a şi b.

**b)** Arătaţi că $a<\frac{1007}{2015}<b$.

**2.** **a)** Să se arate că $(11-x)(11-y)=121-11(x+y)+xy, \forall x, y \in \mathbf{Z}$.

**b)** Determinaţi perechile de numere întregi $(a,b)$ care verifică relaţia $a^2b^2-11a^2-11b^2=1893$.

*( Gazeta Matematică nr. 10/2013)*

**3.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi $E\in(CD)$. Dacă $\{F\}=AE\cap BC$, $\{G\}=BE\cap AD$, $M$ este mijlocul lui $(DG)$ şi $N$ este mijlocul lui $(BC)$, atunci:

**a)** punctele $M$, $E$, $N$ sunt coliniare.

**b)** $AD\le\frac{DG+CF}{2}$.

*( Gazeta Matematică -prelucrare)*

**4.** Fie punctul variabil $M$ situat pe mediana $(AD)$ a triunghiului $ABC$, $D\in(BC)$, $BD=DC$. Parelela prin $M$ la $AB$ taie paralela prin $C$ la $AD$ în $F$ şi paralela prin $M$ la $AC$ taie paralela prin $B$ la $AD$ în $E$. Arătaţi că $[EF]$ are măsura constantă.

*( RMT )*

*Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

*Subiecte selectate şi prelucrate de:* prof. Fărcaş Natalia, Colegiul Naţional „ Vasile Lucaciu”, Baia Mare, prof. Szerasz Maria, Şcoala Gimnazială „Dimitrie Cantemir”, Baia Mare, prof. Sfara Gheorghe, Colegiul Naţional „ Vasile Lucaciu”, Baia Mare.

**MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ**

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ

## CLASA A VII -A
## Barem

**1. a)** $m_a = \dfrac{a+b}{2}$ ..........................................................................................1 p

$a+b = 1+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2014}-\dfrac{1}{2014}\right)-\dfrac{1}{2015}=\dfrac{2014}{2015}$ ..............................2p

$m_a = \dfrac{1007}{2015}$ ..........................................................................................1 p

**b)** $a = \dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{2014\cdot 2015}$ ..........................................................................0,5p

$b = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{2013\cdot 2014}$ ..........................................................................0,5p

$a < b$ .......................................................................................................... 1p

Din $a \le m_a \le b$ şi $a < b$ avem $a < m_a < b \Leftrightarrow a < \dfrac{1007}{2015} < b$ ……………………….…..1p

**2. a)** $(11-x)(11-y) = 121 - 11x - 11y + xy = 121 - 11(x+y) + xy$ ..........................1p

**b)** $a^2b^2 - 11a^2 - 11b^2 = (a^2-11)(b^2-11) - 121$ ..................................................1p

$\Rightarrow (a^2-11)(b^2-11) = 2014$ ………………………………………………………………1p

$2014 = 2\cdot 19\cdot 53$ şi $D_{2014} = \{1;2;19;38;53;106;1007;2014\}$…………………………………1p

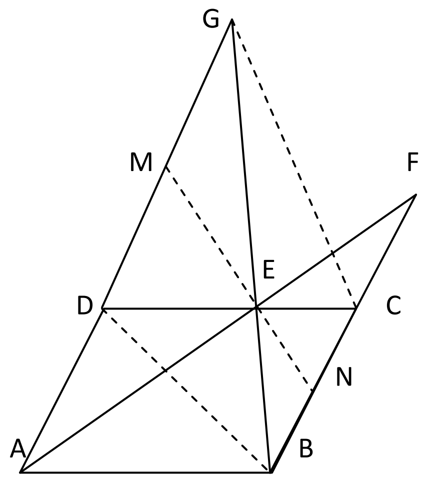
$\Rightarrow a^2 - 11 \in \{\pm 1;\pm 2;19;38;53;106;1007;2014\}$…………………………………………….1p

$\overset{a\in Z}{\Rightarrow} a^2 \in \{9;49;64;2025\} \Rightarrow a \in \{\pm 3;\pm 7;\pm 8;\pm 45\}$

Analog $b \in \{\pm 3;\pm 7;\pm 8;\pm 45\}$ ……………………………………………………………….…1p

$\Rightarrow S = \{(-7,-8);(-7,8);(7,-8);(7,8);(-8,-7);(-8,7);(8,-7);(8,7)\}$………………………..1p

**3. a)** figura…………………………………………………………………………1p




$DBCG$ –trapez $\Rightarrow M, E, N$ coliniare……………………………………………1p

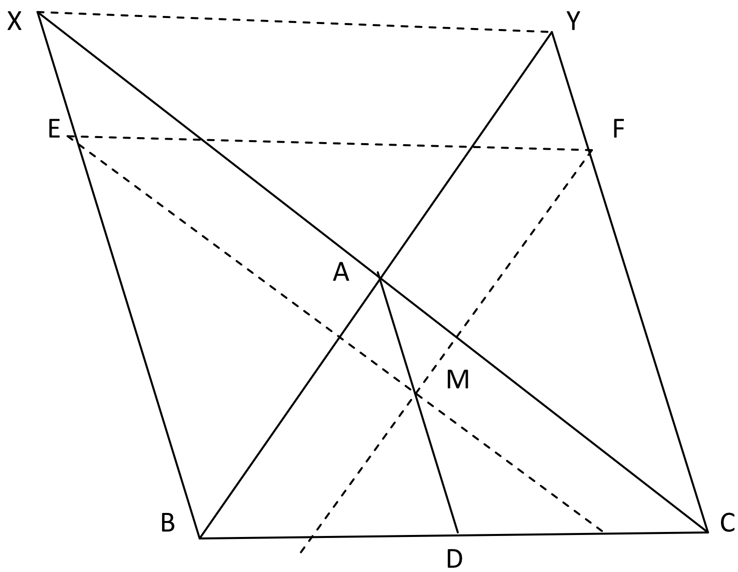
**b)** $DE \parallel AB \Rightarrow \Delta GDE \sim \Delta GAB \Rightarrow \dfrac{DG}{AG} = \dfrac{DE}{AB} \Rightarrow \dfrac{DG}{AD+DG} = \dfrac{DE}{AB}$

$EC \parallel AB \Rightarrow \Delta FCE \sim \Delta FBA \Rightarrow \dfrac{CF}{BF} = \dfrac{EC}{AB} \Rightarrow \dfrac{CF}{BC+CF} = \dfrac{EC}{AB}$ ..........................1p

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{DG}{AD}}} = \frac{DE}{AB} \Big| \cdot 2 \\ &\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{CF}{BC}}} = \frac{EC}{AB} \Big| \cdot 2 \end{aligned}\right\} (+) \overset{m_h \le m_a}{\Rightarrow} 2 \le \frac{\frac{DG}{AD}+1}{2} + \frac{\frac{CF}{BC}+1}{2}$$ …………………………..2p

$\Rightarrow AD \le \dfrac{DG+CF}{2}$ ..............................................................................................1p

**4.** figura………………………………………………………………………..1p




Fie $\{X\} = BE \cap AC$ şi $\{Y\} = AB \cap CF$ ..............................................................1p

$XE \overset{\parallel}{=} AM; YF \overset{\parallel}{=} AM \Rightarrow XE \overset{\parallel}{=} YF \Rightarrow XYFE$ paralelogram....................................2p

Dar $[AD]$ l.m. în $\Delta BCX$ şi $\Delta CBY \Rightarrow XB = YC = 2AD$................................1p

$\Rightarrow XBCY$ paralelogram $\Rightarrow XY = BC = EF$ =constantă..................................2p