Barem clasa a V-a
(OLM 2016-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

$\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 5 + 36$, deci $a > c$, a-b=1, deci a=b+1, $a \neq 0, c \neq 0$ **(2 puncte)**

$55 \cdot b + 59 = 499 \cdot c$, deci u$(55 \cdot b + 59) = 9$ *sau* 4 **(3 puncte)**

a) dacă u$(55 \cdot b + 59) = 9$, atunci b este par și c=1, deci $55 \cdot b = 440, b = 8, a = 9$ și $\overline{abc} = 981$ **(1 punct)**

b) dacă u$(55 \cdot b + 59) = 4$, atunci c=6, deci $55 \cdot b = 2935,\ 11 \cdot b = 587$ și b nu e cifră. **(1 punct)**

Singura soluție este $\overline{abc} = 981$

(Se punctează orice altă justificare că 981 este singura soluție)

Subiectul II. (7 puncte)

$A = 1 + 1 \cdot 2 - 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$

(1 punct)

$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ **(1 punct)**

a) Dacă n=9 ultima cifră a numărului A este 0, deci A+2 are ultima cifră 2 și nu este pătrat perfect. **(3 puncte)**

b) Dacă n=50 numărul A are 12 zerouri, determinate de numărul aparițiilor lui 5 în produs. **(2 puncte)**

Subiectul III. (7 puncte)

a) Dacă $x \in A$ și $x = 11 \Rightarrow 11^2 = 121 \Rightarrow 1 + 2 + 1 = 4 \in A$

Dacă $4 \in A \Rightarrow 4^2 = 16 \Rightarrow 1 + 6 = 7 \in A$ **(1 punct)**

Dacă $7 \in A \Rightarrow 7^2 = 49 \Rightarrow 4 + 9 = 13 \in A$ **(1 punct)**

Dacă $13 \in A \Rightarrow 13^2 = 169 \Rightarrow 1 + 6 + 9 = 16 \in A$ **(1 punct)**

Dacă $16 \in A \Rightarrow 16^2 = 256 \Rightarrow 2 + 5 + 6 = 13 \in A$ **(1 punct)**

Dar știm că $13 \in A$. Atunci $A = \{4; 7; 11; 13; 16\}$ **(1 punct)**

b) De exemplu: $A = \{9\}$ **(1 punct)**

c) De exemplu: y=12 $\Rightarrow 12^2 = 144 \Rightarrow 1 + 4 + 4 = 9 \in A$

$9 \in A \Rightarrow 9^2 = 81 \Rightarrow 8 + 1 = 9 \in A$ Atunci $A = \{12; 9\}$ **(1 punct)**

Subiectul IV. (7 puncte)

a) Aflăm ultimul număr de pe rândul 48-lea:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 48 = 49 \cdot 24 = 1176 \Rightarrow$ ultimul număr de pe rândul al 48-lea este $1176 \cdot 2 = 2352$ **(2 puncte)**

În rândul al 49-lea vor fi 49 de numere, deci în mijloc este al 25-lea număr, adică 2402; **(2 puncte)**

b) Toate numerele fiind pare, adică 132 de numere, resturile la împărțirea cu 12 aparțin mulțimii $\{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$. **(2 puncte)**

Fiind șase resturi posibile și considerând 7 numere, conform principiului cutiei(al lui Dirichlet) rezultă că cel puțin două dau același rest la împărțirea cu 12, deci diferența lor se împarte exact la 12. **(1 punct)**