Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a IX- a

Subiecte :

1. Numerele $x, y, z \in (0, \infty)$ verifică relația $x + y + z = a$. Arătați că :

   a) $xy + yz + xz \leq \frac{a^2}{3}$.

   b) $\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} < \frac{3a}{2}$.

2. a) Arătați că numerele $1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
   b) Arătați că numerele $1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ nu pot fi printre termenii unei progresii aritmetice, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

3. Fie $ABCD$ un paralelogram, $m, n, p, q \in (0,1)$ și punctele $E(AB), F \in (BC)$, $G \in (CD)$, $H \in (AD)$ astfel încât $\overrightarrow{AE} = m\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = n\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG} = p\,\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DH} = q\,\overrightarrow{DA}$. Știind că vectorii $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, să se arate că $m + n + p + q = 2$.

4. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CD]$. Fie Q mijlocul lui $[MP]$, E mijlocul lui $[AQ]$ și F mijlocul lui $[EN]$. Să se arate că :
   a) $4\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.
   b) Punctele D, Q, F sunt coliniare.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 3 ore. La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem cls. a IX-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1.

a) Folosind inegalitatea cunoscută $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ rezultă $xy +$ $+yz + xz \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{a^2}{3}$ ………………………………………3 p

b) $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} < \frac{x+(y+z)}{2} + \frac{y+(x+z)}{2} + + \frac{z+(x+y)}{2} = \frac{3(x+y+z)}{2} = \frac{3a}{2}$ (egalitatea ar avea loc dacă $x = y + z, y = x + z, z = x + y$, adică $x = y = z = 0$, fals)………………………………………………4 p

2. a) Ar rezulta $\sqrt{n}^{\,2} = 1 \cdot \sqrt{n+1}$, adică $n = \sqrt{n+1}$ sau $n^2 - n - 1 = 0$, care nu are soluții numere naturale………………………………3 p

b) Ar rezulta $\sqrt{n+1} = 1 + kr, \sqrt{n} = 1 + pr, k, p \in \mathbb{Z}^*$, $r \in \mathbb{R}^*$ și

$\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1} = \frac{k}{p} \in \mathbb{Q}^*, \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1)}{n-1} \in \mathbb{Q}^*$, adică $\left(\sqrt{n+1} - 1\right)\left(\sqrt{n} + 1\right) \in \mathbb{Q}^*$

$$\left(\sqrt{n+1} - 1\right)\left(\sqrt{n} + 1\right) = \frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+1} \cdot \frac{n-1}{\sqrt{n}-1} .$$

Dacă $\left(\sqrt{n+1} - 1\right)\left(\sqrt{n} + 1\right)$ ar fi rațional, atunci și $\left(\sqrt{n+1} + 1\right)(\sqrt{n} - 1)$ ar fi rațional…………………………………………………………………..2 p

Ar rezulta că $\left(\sqrt{n+1} - 1\right)\left(\sqrt{n} + 1\right) + \left(\sqrt{n+1} + 1\right)\left(\sqrt{n} - 1\right)$ este rațional, adică $2\sqrt{n(n+1)} - 2$ rațional, fals, deoarece $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$…2 p

3. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = (1-m)\overrightarrow{AB} + n\,\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = q\,\overrightarrow{AD} + +(1-p)\overrightarrow{DC}$ ………………………………………………………………………………2 p

Va rezulta $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = (1 - m + 1 - p)\overrightarrow{AB} + (n+q)\,\overrightarrow{BC}$,
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right), \alpha \in \mathbb{R}$ și $(1 - m + 1 - p - \alpha)\overrightarrow{AB} =$
$= (-n - q + \alpha)\,\overrightarrow{BC}$

……………………………………………………………………..3 p

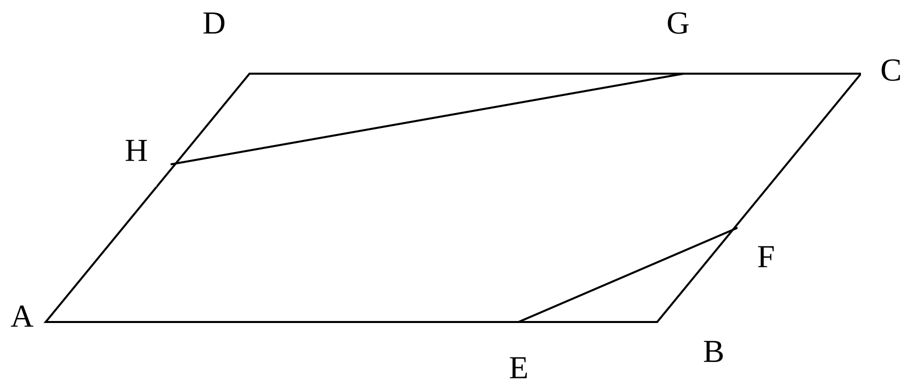
Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

$\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ necoliniari , $1-m+1-p-\alpha=-n-q+\alpha=0$, deci $\alpha=1-m+1-p=n+q$ și $m+n+p+q=2$...........................2 p

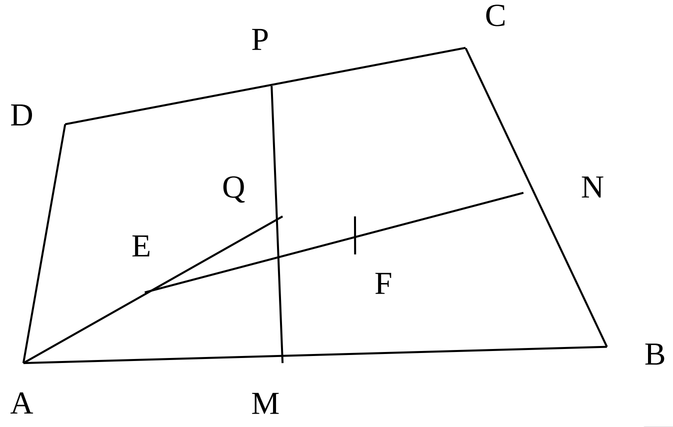
4. a) $4\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{DP}+2\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$......................................3 p

$b)\ \overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DE}+\ \overrightarrow{DN}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{5}{4}\overrightarrow{DQ}$, folosind relația de la punctul a) și D,Q,F coliniare...4 p

3.



4.



Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro