



Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SUBIECTE

1. Construim mijloacele laturilor poligonului $A_1A_2 \dots A_{2013}$; apoi ștergem poligonul. Se poate reconstrui poligonul cunoscând doar aceste mijloace? Dar dacă pornim de la un poligon cu 2012 laturi?

2. Arătați că numărul cifrelor în baza zece a numărului 2^{2013} este mai mare decât 600.

3. Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat, și $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Arătați că pentru orice număr

$$a \in \mathbb{C} \text{ și orice număr } r \in \mathbb{R}, r > 0 \text{ suma } S = \sum_{k=1}^n \frac{|a|}{|a - r\varepsilon^k|^2 + r^2}$$

este un număr întreg!

4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $xyf(x+y) = (x+y)f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.