Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a 3-a - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a XII-a

Problema 1.

Determinaţi funcţiile continue $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ care verifică relaţia

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \cdots \cdot \int_0^1 f^{2020}(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1010}.$$

Soluţie: Dacă $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ este o funcţie constantă, cu $f(x) = c$ pentru orice $x \in [0,1]$, atunci

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \cdots \cdot \int_0^1 f^{2020}(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot c^2 \cdot \cdots \cdot c^{2020} = c^{2021\cdot 1010} =$$

$$= \left(c^{2021}\right)^{1010} = \left(\int_0^1 f^{2021}(x)\right)^{1010}.$$

Fie $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ o funcţie continuă oarecare. Conform inegalităţii lui Hölder, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\left(\int_0^1 \left(f^k(x)\right)^{\frac{k+1}{k}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{k}{k+1}} \cdot \left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k+1}} \geq \int_0^1 f^k(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

. . . . 2p

de unde rezultă că

$$\left(\int_0^1 f^{k+1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{k} \geq \left(\int_0^1 f^k(x)\,\mathrm{d}x\right)^{k+1},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă f este o funcţie constantă. 1p

Notând $a_k = \left(\int\limits_0^1 f^{k+1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^k$, rezultă atunci că

$$a_k \geq a_{k-1} \cdot \left(\int_0^1 f^k(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \quad , \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

. . . . 1p

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă atunci că

$$a_n \geq a_{n-1} \cdot \left(\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geq a_{n-2} \cdot \left(\int_0^1 f^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \cdot \left(\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geq \ldots$$

$$\cdots \geq a_1 \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \cdot \cdots \cdot \left(\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geq$$

$$\geq \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \cdot \cdots \cdot \left(\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Atunci

$$\left(\int_0^1 f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{2}} \geq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \cdots \cdot \int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă f este o funcţie constantă. 2p
Pentru $n = 2020$, o funcţie care verifică egalitatea din enunţ este o funcţie constantă. Prin urmare, funcţiile care verifică proprietatea din enunţ sunt funcţiile constante. 1p

Problema 2.

Să se determine inelele nenule finite, cu unitate, în care suma tuturor elementelor este un element inversabil.

Soluţie: Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul unitar finit cu proprietatea că suma tuturor elementelor sale este un element inversabil $u \in U(A)$.
Deoarece funcţia $f : A \longrightarrow A$, $f(x) = -x$, este bijectivă, notând $2 = 1 + 1$, avem

$$2 \cdot u = u + u = \sum_{x\in A} x + \sum_{x\in A} (-x) = \sum_{x\in A} (x + (-x)) = 0.$$

. . . . 3p
Atunci $2 = 2 \cdot u \cdot u^{-1} = 0$, astfel că $a + a = 2 \cdot a = 0$ pentru orice element $a \in A$. 1p
Dăm două variante de continuare - punctajele nu se cumulează
var.1
Inelul A fiind nenul, există un număr natural nenul n şi o mulţime de elemente $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq A$ cu proprietăţile

$$a_1 \neq 0, \quad a_{k+1} \in A \setminus A_k, \text{ pentru orice } k = \overline{1, n-1},$$

unde $A_k = \{\sum_{x\in B} x |\, B \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}\}$. 1p
Pentru fiecare element $a \in A$ există atunci o submulţime unică $M_a \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, cu proprietatea că

$$a = \sum_{x\in M_a} x\,.$$

. . . . 1p
Atunci $|A| = 2^n$ şi

$$0 \neq u = \sum_{a\in A} a = 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_k\,,$$

astfel că $n = 1$, $|A| = 2$ şi $A \simeq \mathbb{Z}_2$. 1p
var.2
Cu teorema lui Cauchy rezultă atunci că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|A| = 2^n$. 1p
Definim pe A relaţia

$$x \sim y \overset{def}{\Longrightarrow} x = y \text{ sau } x + 1 = y.$$

Această relaţie este o relaţie de echivalenţă, astfel că A se partiţionează în 2^{n-1} clase de echivalenţa de forma $\{x, 1 + x\}$. 1p
Considerând un sistem R de reprezentanţi ai claselor de echivalenţă, avem:

$$0 \neq u = \sum_{a\in A} a = \sum_{x\in R} (x + 1 + x) = \sum_{x\in R} 1 = 2^{n-1} \cdot 1.$$

Rezultă că $n = 1$, $|A| = 2$ şi $A \simeq \mathbb{Z}_2$. 1p
în concluzie:
Singurul inel care verifică condiţia din enunţ este $\mathbb{Z}_2$.

Problema 3.

Fie $a \in \mathbb{N}$, $a > 2$. Să se arate că
a) Există un număr $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, care nu este prim, astfel încât $a^n \equiv 1 \pmod{n}$.

b) Dacă p este cel mai mic număr din $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care $a^p \equiv 1 \pmod{p}$, atunci p este prim.
c) Nu există numere $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care $2^n \equiv 1 \pmod{n}$.

Soluţie: a) Fie $d > 1$ un divizor al numărului $a-1$ şi $q = \dfrac{a-1}{d}$. Dacă $n = d^2$, atunci n nu este prim şi

$$a^n = (1+qd)^n = 1 + nqd + \mathcal{M}d^2 \equiv 1 \pmod{n}.$$

.... 1p
b) Fie p cel mai mic număr natural, cu $p > 1$ şi $a^p \equiv 1 \pmod{p}$. Rezultă că $(a,p) = 1$ şi $\hat{a}$ este un element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_p$. 1p
În grupul multiplicativ $U(\mathbb{Z}_p)$ avem atunci că $\hat{a}^p = 1 = \hat{a}^{\varphi(p)}$ şi $ord(\hat{a})|(p, \varphi(p))$.
.... 1p
Dacă $ord(\hat{a}) = q > 1$, atunci $q \leq \varphi(p) < p$ şi

$$a^q = 1 + \mathcal{M}p \equiv 1 \pmod{q},$$

ceea ce contrazice minimalitatea lui p. 1p
Dacă $ord(\hat{a}) = 1$, atunci $a \equiv 1 \pmod{p}$, de unde $a \equiv 1 \pmod{q}$ şi $a^q \equiv 1 \pmod{q}$ pentru orice divizor $q > 1$ al lui p. Minimalitatea lui p implică deci că p nu are divizori proprii $q > 1$, deci p este prim. 1p
c) Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, cu $2^n \equiv 1 \pmod{n}$, fie p cel mai mic număr natural cu $p > 1$ şi $2^p \equiv 1 \pmod{p}$. Proprietatea de minimalitate a lui p implică că în grupul $U(\mathbb{Z}_p)$ $ord(\hat{2}) = 1$, adică

$$2 \equiv 1 \pmod{p},$$

ceea ce este absurd. Rezultă că nu există numere naturale n, cu $n > 1$, astfel încât $2^n \equiv 1 \pmod{n}$. 2p

Problema 4.

Fie $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu proprietatea că $f(0) = 0$. Arătaţi că pentru orice $\alpha \geq 0$ are loc inegalitatea

$$(\alpha+2) \cdot \int_0^1 x^\alpha \left(f(x) + f^{-1}(x)\right) \mathrm{d}x \leq 2.$$

Soluţie: Funcţia f fiind continuă şi bijectivă este strict monotonă, şi cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(1) = 1$ şi f este strict crescătoare. 1p
Conform inegalităţii lui Young, avem

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geq x^2 \qquad \text{, pentru orice } x \in [0,1],$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $f(x) = x$. 2p
Inegalitatea de mai sus se mai scrie

$$\int_0^x \left(f(t) + f^{-1}(t) - 2t\right) \mathrm{d}t \geq 0 \qquad \text{pentru orice } x \in [0,1].$$

.... 2p
Fie $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia definită prin $G(x) = \int_0^x \left(f(t) + f^{-1}(t) - 2t\right) \mathrm{d}t$. Atunci $G(1) = G(0) = 0$, $G(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, G este derivabilă şi pentru orice $\alpha \geq 0$ avem

$$\int_0^1 x^\alpha \left(f(x) + f^{-1}(x)\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^\alpha \left(f(x) + f^{-1}(x) - 2x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\alpha+2} + \int_0^1 x^\alpha G'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha+2} + \lim_{a\to 0}\left(G(1) - G(a)\cdot a^\alpha - \int_a^1 \alpha\cdot x^{\alpha-1} G(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\alpha+2}\,.$$

Rezultă că

$$(\alpha+2)\cdot\int_0^1 x^\alpha\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)\,\mathrm{d}x \leq 2.$$

.... 2p