MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
SUBIECTE clasa a XI-a MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

1.	Se consideră matricea $A_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$, $a,b \in R^*$. a) Dacă $M = A_{(a,-a)}$ şi $\lvert a \rvert \neq 1$ calculaţi determinantul $\lvert I_3 + M + M^2 + ... + M^{2013} \rvert$. b) Calculaţi $A_{(a,b)}^n$, $n \in N^*$.
2.	Se consideră mulţimea $M = \{A \in M_3(Z) \mid a_{ij} \in \{+1,-1\}\}$ a) Dacă $A \in M$ arătaţi că $4 \mid \det A$. b) Determinaţi mulţimea $D = \{\det A \mid A \in M\}$.
3.	Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = a \in [-1,1]$ şi $2a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n - 1$ $\forall n \geq 0$.
4.	Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{n} + \frac{n+1}{n^2}$ pentru orice $n \geq 1$. a) Demonstraţi că şirul este convergent. b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

succes !

Prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar pentru matematică – I.Ş.J. Timiş
Lector.dr. Mihai Chiş-preşedinte S.S.M.R. – Filiala Timiş

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A XI-a
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

a) Calculează $M^2, M^3, ..., M^{2013}$ 1p

Determină matricea $I_3 + M + M^2 + ... + M^{2013}$ 1p

Calculează determinantul $\left|I_3 + M + M^2 + ... + M^{2013}\right| = \dfrac{\left(a^{2014}-1\right)^3}{\left(a^2-1\right)^2}(a-1)$..........1p

b) Scrie $A_{(a,b)} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aB + bI_3$ 1p

Calculează $B^2 = 2B,\ B^3 = 2^2 B,$ şi demonstrează că $B^n = 2^{n-1}B$ 1p

Calculează $A_{(a,b)}^n = \left(aB + bI_3\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} B^{n-k} b^k I_3 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} 2^{n-k-1} b^k B + b^n I_3 =$

$= \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_n^k (2a)^{n-k} b^k B + b^n I_3 = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (2a)^{n-k} b^k B - b^n B\right) + b^n I_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(2a+b)^n - b^n}{2}\right)B + b^n I_3$

sau $A_{(a,b)}^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(2a+b)^n + b^n}{2} & 0 & \dfrac{(2a+b)^n - b^n}{2} \\ 0 & b^n & 0 \\ \dfrac{(2a+b)^n - b^n}{2} & 0 & \dfrac{(2a+b)^n + b^n}{2} \end{pmatrix}$ 2p

Subiectul 2:

a) În determinantul matricei $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,3}}$ se scade din linia 2 linia 1 şi din linia 3 linia 1

şi se obţine $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$; $d_{ij} = a_{ij} - a_{1j} \in \{-2;0;2\}; i = 2,3;\ j = 1,2,3$ 2p

Deoarece d_{ij} se divide cu 2 , notăm $d_{ij} = 2k_{ij}\ ; k_{ij} \in \{-1;0;1\}; i = 2,3;\ j = 1,2,3$ şi obţinem

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2k_{21} & 2k_{22} & 2k_{23} \\ 2k_{31} & 2k_{32} & 2k_{33} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}$ deci $4 \mid \det A$ 2p

b) Cu inegalitatea modulului obţine că $|\det(A)| \leq 6$ 1p

$4 \mid \det A$, deci $D \subseteq \{-4,\ 0\ ,\ +4\}$ 1p

Arată că există câte o matrice $A \in M$ pentru fiecare dintre valorile $-4, 0, 4$ posibile ale determinantului, astfel că $D = \{-4,\ 0\ ,\ +4\}$..1p

Subiectul 3:

Consideră şirul $(b_n)_{n\geq 0}, b_n = \frac{1}{2}(a_n + 1)$ 1p

Arată că $b_{n+1} = b_n^2$ şi $b_n \in [0,1], \forall n \geq 0$..2p

Dacă $a = -1$, atunci $b_n = 0, \forall n \geq 0$ şi $a_n = -1, \forall n \geq 0$..1p

Dacă $a = 1$, atunci $b_n = 1, \forall n \geq 0$ şi $a_n = 1, \forall n \geq 0$...1p

Dacă $a \in (-1,1)$, atunci $b_n \in (0,1), \forall n \geq 0$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător....................1p

Trecând la limită, deduce că $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ şi atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$...1p

Subiectul 4:

a) Arată că $0 < x_n \leq 3, \forall n \geq 1$..2p

Deduce că $0 < x_n \leq \frac{4n+1}{n^2}, \forall n \geq 1$..1p

Obţine că şirul este convergent, cu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 1p

b) Rescrie relaţia de recurenţă sub forma $(n+1)x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$........1p

Deduce că $\lim_{n\to\infty} n x_n = 1$..2p