Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

## SOLUŢII

**1.** Construim mijloacele laturilor poligonului $A_1A_2...A_{2013}$, apoi ştergem poligonul. Se poate reconstrui poligonul cunoscând doar aceste mijloace? Dar dacă pornim de la un poligon cu $2012$ laturi?

**Rezolvare**

Prezentăm rezolvarea generală a problemei.

Se disting două cazuri, pentru poligoane cu $2n+1$ laturi, respectiv cu $2n$ laturi.

I. Dacă $a_1, a_2, ..., a_{2n+1}$ sunt afixele vârfurilor poligonului cu $2n+1$ laturi, atunci afixele mijloacelor laturilor sunt $m_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $m_2 = \dfrac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, m_{2n} = \dfrac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$ şi $m_{2n+1} = \dfrac{a_{2n+1} + a_1}{2}$ (*).

Întrebarea se poate reformula în modul următor: dacă se cunosc doar numerele complexe $m_1, m_2, ..., m_{2n+1}$, se pot determina oare în mod unic numerele complexe $a_1, a_2, ..., a_{2n+1}$.

Pornind de la egalităţile (*), se obţin pe rând următoarele egalităţi:

$$a_2 = 2m_1 - a_1;$$
$$a_3 = 2m_2 - a_2 = 2m_2 - 2m_1 + a_1;$$
$$a_4 = 2m_3 - a_3 = 2m_3 - 2m_2 + 2m_1 - a_1.$$

Se demonstrează prin inducţie că

$$a_k = 2m_{k-1} - 2m_{k-2} + ... + 2(-1)^k m_1 + (-1)^k a_1,\ \forall k \in \{1, 2, ..., 2n+1\}.$$

Deci $a_{2n+1} = 2m_{2n} - 2m_{2n-1} + ... - 2m_1 + a_1$ şi având în vedere ultima egalitate din (*) avem $a_{2n+1} = 2m_{2n+1} - a_1 \Rightarrow$ $2a_1 = 2m_{2n+1} - 2m_{2n} + 2m_{2n-1} - ... + 2m_1$ $\Rightarrow$ $a_1 = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 + ... + m_{2n+1}$. Deoarece $a_2$, $a_3$, ..., $a_{2n+1}$ depind în mod unic de $a_1$ rezultă că în acest caz se poate construi poligonul cunoscând doar mijloacele laturilor.

II. Pentru poligonul cu $2n$ laturi, pornind la fel se obţine

$$a_2 = 2m_1 - a_1$$
$$..................$$
$$a_k = 2m_{k-1} - 2m_{k-2} + ... + 2(-1)^k m_1 + (-1)^{k+1} a_1.$$

Deci $a_{2n} = 2m_{2n-1} - 2m_{2n-2} + ... + 2m_1 - a_1$ şi $a_{2n} = 2m_{2n} - a_1$. Scăzând cele două egalităţi se obţine $m_{2n} - m_{2n-1} + ... - m_1 = 0$, construcţia fiind posibilă numai dacă este valabilă această egalitate (egalitatea este valabilă, dacă numerele complexe sunt afixele mijloacelor laturilor unui poligon). În final în acest caz poligonul nu se poate construi în mod unic, dar dacă alegem un număr complex oarecare $a_1$, atunci există un singur poligon cu $2n$ laturi, pentru care numerele complexe $m_1$, $m_2$, ..., $m_{2n}$ sunt afixele mijloacelor laturilor.

**2.** Arătați că numărul cifrelor în baza zece a numărului $2^{2013}$ este mai mare decât $600$.

**Rezolvare**

Dacă $n$ este numărul cifrelor lui $2^{2013}$, atunci $10^{n-1} \leq 2^{2013} < 10^n$

$n - 1 \leq 2013 \lg 2 < n$

Vom arăta că $2013 \lg 2 > 600$.

$$2013 \lg 2 > 2000 \lg 2 \overset{?}{>} 600$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $\lg 2 \overset{?}{>} \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow 2 \overset{?}{>} 10^{\frac{3}{10}} \Leftrightarrow 2^{10} \overset{?}{>} 10^3 \Leftrightarrow 1024 \overset{?}{>} 1000$, inegalitate adevărată.

**3.** Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat, și $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \sin\dfrac{2\pi}{n}$. Arătați că pentru orice număr $a \in \mathbb{C}$ și orice număr $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ suma $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left|a - r\varepsilon^k\right|^2}{\left|a\right|^2 + r^2}$ este un număr întreg!

**Rezolvare**

Evident $\varepsilon^n = \left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i \sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^n = 1 \Rightarrow \overline{\varepsilon}^n = 1$.

Se folosesc proprietățile: $\left|z\right|^2 = z\overline{z}$, $\overline{xz + yz'} = x\overline{z} + y\overline{z'}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|a - r\varepsilon^k\right|^2}{\left|a\right|^2 + r^2} = \frac{1}{\left|a\right|^2 + r^2} \sum_{k=1}^{n} \left(a - r\varepsilon^k\right)\left(\overline{a - r\varepsilon^k}\right) = \frac{1}{\left|a\right|^2 + r^2} \sum_{k=1}^{n} \left(a - r\varepsilon^k\right)\left(\overline{a} - r\overline{\varepsilon}^k\right);$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{\left|a\right|^2 + r^2} \sum_{k=1}^{n} \left(a\overline{a} + r^2 - r\overline{a}\varepsilon^k - ra\overline{\varepsilon}^k\right) = \frac{1}{\left|a\right|^2 + r^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\left|a\right|^2 + r^2\right) - \frac{r\overline{a}}{\left|a\right|^2 + r^2} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k - \frac{ra}{\left|a\right|^2 + r^2} \sum_{k=1}^{n} \overline{\varepsilon}^k$$

Prima sumă $\dfrac{1}{\left|a\right|^2 + r^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\left|a\right|^2 + r^2\right) = n$, iar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k = \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n = \dfrac{\varepsilon\left(\varepsilon^n - 1\right)}{\varepsilon - 1} = 0$, la fel ultima sumă este nulă. În concluzie $S = n \in \mathbb{Z}$.

**4.** Determinați funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $xyf\left(x + y\right) = \left(x + y\right)f\left(x\right)f\left(y\right)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

**Rezolvare**

Pentru $x = -y \neq 0$ obținem $-x^2 f\left(0\right) = 0$ de unde rezultă $f\left(0\right) = 0$.

Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$, atunci $\dfrac{f(x+y)}{x+y} = \dfrac{f(x)}{x} \cdot \dfrac{f(y)}{y}$.

Notăm $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, rezultă $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}^*$

Se demonstrează prin inducție că $g(n \cdot x) = (g(x))^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{Q}^*$

Dacă $g(1) = a$, atunci $g(n) = a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$a = g\left(n \cdot \dfrac{1}{n}\right) = \left(g\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $a \geq 0$ și $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$

$g\left(\dfrac{m}{n}\right) = g\left(m \cdot \dfrac{1}{n}\right) = \left(g\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $g(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}_+^*$

$g(-n) = g(n(-1)) = (g(-1))^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$g(1) = g(2 + (-1)) = g(2) \cdot g(-1)$, deci $a = a^2 g(-1)$

Astfel dacă $a = 0$, atunci $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}^*$ și $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$

Iar dacă $a > 0$, atunci $g(-1) = \dfrac{1}{a} = a^{-1}$, deci $g(-n) = a^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$a^{-1} = g\left(n \cdot \left(-\dfrac{1}{n}\right)\right) = \left(g\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $g\left(-\dfrac{1}{n}\right) = a^{-\frac{1}{n}}$

$g\left(-\dfrac{m}{n}\right) = g\left(m \cdot \left(-\dfrac{1}{n}\right)\right) = \left(g\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right)^m = a^{-\frac{m}{n}}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $g(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}^*$ și $f(x) = xa^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, unde $a > 0$