**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Etapa locală – Constanţa 21.02.2016

**Clasa a IX -a**

## SUBIECTUL 1

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia : $[x]+[x^2]=2$, ( unde $[x]$ este partea întreagă a lui x)

( prelucrare GMB )

## SUBIECTUL 2

a) Să se arate că $a^2-a\geq -\frac{1}{4}, \forall a\in \mathrm{R}$

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia : $4^x-2^x=6x$

prof. Gabriela Constantinescu

## SUBIECTUL 3

Fie $x,y,z\in R$ cu $x^4+y^4+z^4\leq 48$.

a) Demonstraţi că $x^2+y^2+z^2\leq 12$

b) Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2+x^2}}\geq 1$. În ce caz avem egalitatea ?

prof. Cătălin Zîrnă

## SUBIECTUL 4

Fie patrulaterul convex ABCD şi punctele M, N, P, Q respectiv laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DA]$ astfel încât $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CD}=\frac{DQ}{DA}=k, k>0, k\neq\frac{1}{2}$. Atunci MNPQ paralelogram $\Leftrightarrow$ ABCD paralelogram.

prof. Dorin Arventiev

**Notă:**
Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**
Etapa locală – Constanţa 21.02.2016
**Clasa a IX -a**
**Barem de corectare şi notare**

**SUBIECTUL 1**

Dacă $x \geq 2 \Rightarrow [x] \geq 2, [x^2] \geq 4$, (F)…………………………………………………**2p**

$x \in [0,1) \Rightarrow x^2 \in [0,1)$ (F)……………………………………………………………**1p**

$x \in [1, \sqrt{2}) \Rightarrow x^2 \in [1,2) \Rightarrow 1+1=2 \Rightarrow x \in [1,\sqrt{2})$ este soluţie……………………………**3p**

$x \in [\sqrt{2},2) \Rightarrow x^2 \in [2,4) \Rightarrow [x]+[x^2] \geq 1+2=3$ (F). Deci soluţia este $x \in [1,\sqrt{2})$…………**1p**

**SUBIECTUL 2**

a) Prin calcul direct ………………………………………………………………**2p**

b) Pentru $x<0$, $4^x - 2^x \geq -\frac{1}{4}$; $6x \leq -6 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii în $Z \setminus N$ ……..**2p**

$x \in N$ . x = 0 e soluţie, x=1 nu convine, x=2 e soluţie………………………………**1p**

Inducţie matematică pentru $4^n - 2^n \succ 6n, \forall n \geq 3, n \in N \Rightarrow S=\{0,2\}$………**2p**

**SUBIECTUL 3**

**a)** $(x^2+y^2+z^2)^2 \leq (1+1+1)(x^4+y^4+z^4) \leq 144$ ……………………………………**2p**

Finalizare ……………………………………………………………………………………**1p**

**b)** $$\sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1+x^2+y^2}{3}} \leq \frac{3+\frac{`1+x^2+y^2}{3}}{2} = \frac{10+x^2+y^2}{6}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \geq \frac{6}{10+x^2+y^2}$ şi analoagele ……………………………………**2p**

$$S \geq \frac{6}{10+x^2+y^2} + \frac{6}{10+y^2+z^2} + \frac{6}{10+z^2+x^2} \geq \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6})^2}{30+2(x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{54}{30+2\cdot 12} = 1$$

Egalitate pentru $\pm 2$ ………………………………………………………………**2p**

**SUBIECTUL 4**

$\frac{AM}{AB} = k \Rightarrow \frac{MB}{AB} = 1-k$ şi_analoagele.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{DC}$ ………**1p**

MNPQ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{DC}$ ……..**2p**

$\Leftrightarrow (1-k)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$……………………………………………**1p**

$\Leftrightarrow (1-k)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$…………………………………**2p**

$\Leftrightarrow (1-2k)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{0}, 1-2k \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ deci ABCD paralelogram………**1p**

**<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .**