OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I (7p)

Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a \geq -\frac{18}{15}$, $b \geq -\frac{7}{10}$ astfel încât $3a+2b=17$ şi expresia $E(a,b)=3\sqrt{15a+8}+4\sqrt{10b+7}$.

3p) a) Pentru $a=3$ să se demonstreze că $E(a,b)<50$;

4p) b) Să se determine valoarea maximă a expresiei $E(a,b)$, şi valorile numerelor a , b pentru care se atinge acest maxim.

SUBIECTUL II (7p)

Se consideră suma $S_n=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+...+\left[\frac{n}{3}\right]$, $n \in N^*$. Se cere:

2p) a) Calculaţi S_n pentru $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$;

5p) b) Să se arate că $S_n=\begin{cases} \frac{n(n-1)}{6}, & n=3m \text{ sau } n=3m+1 \\ \frac{(n-2)(n+1)}{6}, & n=3m+2 \end{cases}$.

SUBIECTUL III (7p)

Fie ABC un triunghi şi $D \in (BC)$ astfel încât $CD=k \cdot BC, k>0$.

4p) a) Demonstraţi că $AD<kAB+(1-k)AC.$

3p) b) Dacă $(AD$ este bisectoarea unghiului A, demonstraţi că $\frac{2}{AD}>\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

SUBIECTUL IV (7p)

Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât $\frac{AM}{MB}=l,\ \frac{CN}{NB}=k,\ \frac{CP}{PD}=m,\ \frac{AQ}{QD}=p,$ unde $l, k, m, p > 0$ şi $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele QN, PM şi AC sunt concurente.

<u>NOTĂ:</u> ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

BAREM DE CORECTARE

etapa locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I (7p)

a) $a=3 \Rightarrow b=4 \Rightarrow E(a,b)=3\sqrt{53}+4\sqrt{47}$ .... $(1p)$

$3\sqrt{53}<22$, $4\sqrt{47}<28$ şi $E(a,b)<50$ .... $(2p)$

b) Folosind inegalitatea CBS avem: $\left(3\sqrt{15a+8}+4\sqrt{10b+7}\right)^2 \le \left(3^2+4^2\right)\left(15a+8+10b+7\right) \Rightarrow$

$E(a,b)^2 \le 25\left(15+5\left(3a+2b\right)\right) \Rightarrow E(a,b)\le\sqrt{25\left(15+5\cdot 17\right)} \Rightarrow E(a,b)\le 50$ .... $(2p)$

Egalitate are loc dacă $\dfrac{\sqrt{15a+8}}{3}=\dfrac{\sqrt{10b+7}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{15a+8}{9}=\dfrac{10b+7}{16}=\dfrac{15a+8+10b+7}{25}=\dfrac{5\cdot 17+15}{25}=4$

şi se obţine $a=\dfrac{28}{15}$ şi $b=\dfrac{57}{10}$ .... $(2p)$

SUBIECTUL II (7p)

a) $S_1=S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=2$, $S_5=3$, $S_6=5$ .... $(2p)$

b) Dacă $n=3m$,

$$S_n=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+...+\left[\frac{3m}{3}\right]=0+0+1+1+1+...+(m-1)+(m-1)+(m-1)+m\Rightarrow$$

$$S_n=3\left(1+2+...+m-1\right)+m=3\frac{m(m-1)}{2}+m=\frac{m(3m-3+2)}{2}=\frac{\frac{n}{3}\left(3\cdot\frac{n}{3}-1\right)}{2}=\frac{n\left(n-1\right)}{6}$$ .... $(2p)$

Analog se tratează celelalte două cazuri.. $(3p)$

SUBIECTUL III (7p)

a) $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BC-DC}{DC}=\dfrac{1-k}{k} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}$ .... $(2p)$

$D\in(BC)$ deci $k<1 \Rightarrow |1-k|=1-k$ .... $(1p)$

$AD=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}\right|<k\left|\overrightarrow{AB}\right|+(1-k)\left|\overrightarrow{AC}\right|=kAB+(1-k)AC$ .... $(1p)$

b) Din teorema bisectoarei $k=\dfrac{b}{b+c}$ .... $(1p)$

Atunci din a) obținem $AD<\dfrac{2bc}{b+c}$, de unde $\dfrac{2}{AD}>\dfrac{b+c}{bc}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$ .... $(2p)$

<u>SUBIECTUL IV</u> (7p)

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1+m}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{1+m}\overrightarrow{AD}$ şi analoagele.. $(1p)$

Folosind $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, relaţia dată devine $\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{l+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{p+1}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ şi deci

$m = l$ şi $k = p$ .... $(3p)$

Rezultă $AM = CP$ şi $BN = DQ$. .... $(1p)$

Din paralelogramele *AMCP*, *BNDQ* şi *ABCD* rezultă concurenţa cerută................................ $(2p)$