INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a XII-a

1. Fie $M=\left\{A(x)\,\middle|\,A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup abelian.

b) Să se calculeze simetricul elementului $A(2016)$.

c) Să se calculeze $A^n(x), n\in\mathbf{N}^*$.

2. a) Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru. Să se arate că dacă $x\in G$ și $x^2=e$ atunci $x=e$.

b) Fie G și G' două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente. Să se determine toate morfismele de grup de la G la G'.

3. Fie $a>1$ și $f:\left[\frac{1}{a},a\right]\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că:
$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=k, \forall\, x\in\left[\frac{1}{a},a\right]$. Calculați:

$a)$ $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{(x+1)\cdot f(x)}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

$b)$ $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x+1)\cdot \operatorname{arctg}\, x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

$c)$ Fie $a\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ și $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a\sqrt[n]{\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x$.

4. Determinați primitivele funcției $f:(0,\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{1+|\cos x|}\cdot e^x$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii clasa a XII-a:

1.a) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy)$. Pentru $x\neq\frac{1}{2}$ și $y\neq\frac{1}{2}$ rezultă că $x+y-2xy\neq\frac{1}{2}$.

Se verifică asociativitatea și comutativitatea.

Se arată că elementul neutru este $A(0)$.

Se arată că elementul simetric este: $A(x')=A\left(\frac{x}{2x-1}\right), x\neq\frac{1}{2}$.

b) Simetricul lui $A(2016)$ este $A\left(\frac{2016}{4031}\right)$.

c) $A^2(x)=A\left(\frac{1-(1-2x)^2}{2}\right)$, $A^3(x)=A\left(\frac{1-(1-2x)^3}{2}\right)$;

Prin inducție matematică se arată că $A^n(x)=A\left(\frac{1-(1-2x)^n}{2}\right)$.

2. a) Dacă $x\neq e\Rightarrow ord(x)=2$. Cum $|G|=2015$, din teorema lui Lagrange rezultă $2/2015$, fals.

b) Fie $(G,*)$ și $(G',\circ)$ cele două grupuri, e-elementul neutru al lui G, e' - elementul neutru al lui G' și $f:G\to G'$ un morfism de grupuri. Atunci , pentru orice

$x\in G:\underbrace{f(x)\circ f(x)\circ...\circ f(x)}_{\text{de 2015 ori}}=e'$ și $e'=f(e)=f\left(\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 2016 ori}}\right)=\underbrace{f(x)\circ f(x)\circ...\circ f(x)}_{\text{de 2016 ori}}$,

de unde $f(x)=e',\forall x\in G$.

3. a) Se notează integrala cu I și folosind substituția $x=\frac{1}{t}$ se obține:

$\mathrm{I}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{(t+1)\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{(t+1)\cdot(k-f(t))}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t\Rightarrow$

$\mathrm{I}=\frac{k}{2}\cdot\left(\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t\right)=k\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}$.

b)Deoarece $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x+1)\cdot\operatorname{arctg}x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$.

c) Pentru $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}x>x\Rightarrow\int_0^a\sqrt[n]{\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x>\int_0^a\sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x=$

$=a^{\frac{n+1}{n}}$.

Dar pentru $\forall\, x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\sqrt[n]{\operatorname{tg} x} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}\operatorname{tg} x} \le \frac{n-1+\operatorname{tg} x}{n}$.

Limita cerută este a.

4. Fie $I_1 = \int \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}\cdot e^x dx, x\in(0,\pi)$ și $I_2 = \int \frac{\sin x - \cos x}{1-\cos x}\cdot e^x dx, x\in(0,\pi)$. Avem:

$$\frac{1}{2}(I_1+I_2) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}\cdot e^x dx = \int \frac{e^x}{\sin x}dx + \int\left(\frac{1}{\sin x}\right)'\cdot e^x dx = \frac{e^x}{\sin x} + C \quad (1) \text{ și}$$

$$\frac{1}{2}(I_2 - I_1) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}\cdot \cos x\cdot e^x dx = \int e^x\,\frac{\cos x}{\sin x}dx + \int\left(\frac{1}{\sin x}\right)'\cdot e^x \cos x dx = \int e^x\,\frac{\cos x}{\sin x}dx + e^x\,\frac{\cos x}{\sin x} -$$

$$-\int \frac{e^x\cos x - e^x \sin x}{\sin x}dx = e^x\cdot\frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + C. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că o primitivă a lui f este de forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sin x}\cdot(1-\cos x - \sin x) + C_1, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ C_2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{e^x}{\sin x}\cdot(1+\cos x + \sin x) + C_3, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$$

Din condiția ca F să fie continuă în $x = \frac{\pi}{2}$ se obține $C_1 = C_2 = C_3 + e^{\frac{\pi}{2}}$ și imediat se verifică derivabilitatea lui F în $x = \frac{\pi}{2}$.