MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

O matrice $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se numește prietena matricei $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă $XY = X + 2024Y$.

1. Dacă $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este prietena matricei $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ arătați că:
   a) $(A - 2024I_2)(B - I_2) = 2024I_2$.
   b) $AB = BA$.
2. Considerăm mulțimile:
   $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | A \text{ are cel puțin o prietenă}\}$ și $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | A \text{ nu are nici o prietenă}\}$.
   Arătați că mulțimile G și H sunt infinite.

SOLUȚIE:

1. a) $(A - 2024I_2)(B - I_2) = 2024I_2 \Leftrightarrow AB - A - 2024B + 2024I_2 = 2024I_2$, adevărat 2p
   b) Din punctul a) $(A - 2024I_2)$ și $(B - I_2)$ sunt inversabile, deoarece $(A - 2024I_2) \cdot \frac{1}{2024}(B - I_2) = I_2$ 1p
   Rezultă $(B - I_2)(A - 2024I_2) = 2024I_2$, deci $BA = A + 2024B$, concluzia. 1p
2. Alegem $A - 2024I_2 = T, T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversabilă (o infinitate de matrice T), deci $A = T + 2024I_2$. Rezultă $\frac{1}{2024}(B - I_2) = T^{-1}$ deci $B = I_2 + 2024 \cdot T^{-1}$.
   Astfel matricea $T + 2024I_2, T$ inversabilă, are prietena $I_2 + 2024 \cdot T^{-1} \Longrightarrow G$ infinită 2p
   Alegem $A - 2024I_2 = U$ neinversabilă $\Longrightarrow$ matricea $A = U + 2024I_2$ nu are prietenă $\Longrightarrow H$ infinită 1p
   SAU: Căutăm $A = \lambda I_2 \implies \lambda B = \lambda I_2 + 2024B \Longrightarrow (\lambda - 2024)B = \lambda I_2$. Alegând $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{2024\}$, matricea λI_2 are prietena $\frac{\lambda}{\lambda - 2024} I_2$, deci G infinită. Alegând A cu $A - 2024I_2$ neinversabilă $\Longrightarrow H$ infinită.

Subiectul 2.

1. Considerăm determinantul $\Delta(m) = \begin{vmatrix} 2m-2 & m-2 & 1 \\ 4m-5 & m-3 & 1 \\ 6m-10 & -4 & -1 \end{vmatrix}, m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $\Delta(m) = 2m^2 - 7m + 6$.

b) Demonstrați că pentru orice $x \in (0, \infty), \Delta(x) + \Delta\left(\frac{1}{x}\right) \geq 2$.

c) Într-un reper cartezian xOy considerăm punctele $A_t(4t - 5, t - 3), B_t(10 - 6t, 4)$ și $C_t(2t - 2, t - 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Demonstrați că există o infinitate de valori t, numere iraționale, pentru care aria triunghiului $A_tB_tC_t$ se exprimă printr-un număr natural.

SOLUȚIE:

a) Calcul 2p

b) $\Delta(x) + \Delta\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 2a^2 - 7a + 8,\ a = x + \frac{1}{x}$ 1p
   Din $a \geq 2 \Longrightarrow 2a^2 - 7a + 8 \geq 2$, rezultă concluzia $(a - 2)(2a - 3) \geq 0$, pentru $a \geq 2$ 1p
   SAU
   $\Delta(x) + \Delta\left(\frac{1}{x}\right) \geq 2, x > 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 7x + 2 \geq 0$ 1p
   $(x - 1)^2(2x^2 - 3x + 2) \geq 0, x > 0$, adevărat 1p

c) $S_{A_tB_tC_t} = \frac{1}{2}|\Delta|$; $\Delta = \begin{vmatrix} 4t-5 & t-3 & 1 \\ 10-6t & 4 & 1 \\ 2t-2 & t-2 & 1 \end{vmatrix} = -\Delta(t)$, deci $S_{A_tB_tC_t} = \frac{1}{2}|2t^2 - 7t + 6|$ 1p
   Căutăm t pentru care $2t^2 - 7t + 6 = 2n, n \in \mathbb{N}$ 1p
   Alegând n număr natural cu ultima cifră 1, 2, 6 **sau** 7, ($n = 10k + p,\ k \in \mathbb{N},\ p \in \{1,2,6,7\}$)atunci discriminantul $\Delta_t = 16\,n + 1$ se termină în 3 sau 7 (deci nu este pătrat perfect) și în consecință,
   $t = \frac{7 \pm \sqrt{16n+1}}{4} \notin \mathbb{Q}$, dar aria triunghiului $A_tB_tC_t$ este egală cu $n \in \mathbb{N}$ 1p

Subiectul 3.

Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor continue $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ care verifică condiția $f\big(f(x)\big) = x+1$ pentru orice $x \in [0,\infty)$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:[0,\infty) \to [0,\infty), f(x) = ax+b$ să fie în mulțimea $\mathcal{F}$.

b) Dacă $f \in \mathcal{F}$ arătați că $f(x+n) = f(x)+n$, pentru orice $x \in [0,\infty)$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dacă $f \in \mathcal{F}$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

d) Dacă $f \in \mathcal{F}$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\{x\})-\{x\}}{x}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x.

SOLUȚIE:

a) $f\big(f(x)\big) = a^2x + ab + b$ 1p

$a^2 = 1; b(a+1) = 1 \Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$ 1p

b) $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$, înlocuim x cu $f(x)$ rezultă $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)+1 \Rightarrow f(x+1) = f(x)+1$ 1p

inducție $f(x+n) = f(x)+n, x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$ 1p

c) Cum pentru orice $x \in [0,\infty)$, $x = [x]+\{x\}, \{x\} \in [0,1)$, folosind b), avem $f(x) = [x] + f(\{x\})$............1p

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\{x\})+[x]}{[x]+\{x\}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\{x\})}{[x]+\{x\}} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{[x]+\{x\}} \underbrace{=}_{[x]=n} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\{x\})}{n+\{x\}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+\{x\}} = 1$............1p

d) Din $f(x) - x = f(\{x\}) + [x] - ([x]+\{x\}) = f(\{x\}) - \{x\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\{x\})-\{x\}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-x}{x} = 0$............ 1p

Subiectul 4.

Într-o zi de vacanță, Ionuț merge pe un traseu montan între două localități A și B. La dus pleacă din A către B, la ora 8 și străbate traseul în 4 ore. Notăm cu $f(t)$ lungimea drumului parcurs de Ionuț la ora $t \geq 8$. A doua zi, la întors pleacă din B către A, la ora 8 și străbate traseul în 4 ore. Notăm cu $g(t)$ lungimea drumului parcurs de acesta la ora t.
t este măsurat în ore iar $f(t)$ și $g(t)$ în metri.

1. Considerând $f(t) = 10t^3 - 80t^2$ iar $g(t) = 120t^2 - 960t$ se cere:
   a) Lungimea traseului.
   b) Dacă după 3 ore, la dus, Ionuț ajunge în punctul C, iar la întors ajunge în punctul D, aflați distanța dintre C și D.
2. Considerând că funcțiile f și g sunt continue arătați că există, între A și B, un punct X în care Ionuț a fost la aceeași oră, atât la dus cât și la întors.

SOLUȚIE:

1. a) $AB = f(12) = g(12) = 5760\ m$ 2p
   b) la dus merge $f(11) = 3630\ m$ iar la întors merge $g(11) = 3960\ m$. Distanța dintre C și D este $(3630 + 3960 - 5760)\ m = 1830\ m$ 2p
2. Trebuie să arătăm că există $t_0 \in [8,12], f(t_0) = d - g(t_0), d = AB = 5760$ 1p
   Considerăm funcția continuă $h:[8,12] \to \mathbb{R}, h(t) = f(t) + g(t) - 5760$.
   Avem $h(8) = f(8) + g(8) - 5760 = -5760 < 0$ și $h(12) = f(12) + g(12) - 5760 = 5760 > 0$.
   Din $h(8) \cdot h(12) < 0, h -$continuă $\Rightarrow$ există $t_0 \in (8,12)$ cu $h(t_0) = 0$, deci concluzia. 2p

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.