Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A IX - A

Problema 1. Rezolvați ecuația $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}$ (unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar $\{x\}$ este partea fracționară a lui x).

Problema 2. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ și $a^2+b^2+c^2=4$, demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^3}{b+3c}+\frac{b^3}{c+3a}+\frac{c^3}{a+3b}\geq 1.$$

Problema 3. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă care nu conține punctul A intersectează dreptele AB, AC și AD în punctele B_1, C_1, respectiv D_1. Arătați că dacă $\overrightarrow{AB_1}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1}=\lambda_2\cdot\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AC_1}=\lambda_3\cdot\overrightarrow{AC}$, atunci $\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_3}$.

Problema 4. Vectorii $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ de modul 1 sunt situați în același semiplan limitat de o dreaptă care trece prin O. Arătați că $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|>1$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A IX - A

Problema 1. Rezolvați ecuația $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}$ (unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar $\{x\}$ este partea fracționară a lui x).

Soluție și barem Se impun condițiile de existență $[x]\neq 0$ și $\{x\}\neq 0$ și scriem ecuația în forma

$\left([x]-\{x\}\right)\left(1-\frac{1}{[x]\cdot\{x\}}\right)=0$ -- 2p

I. $[x]=x\Rightarrow\{x\}\in\mathbb{Z}$. Cum $\{x\}\in[0,1)\Rightarrow\{x\}=0$, care nu convine -- 1p

II. $[x]\cdot\{x\}=1$. Cum $\{x\}\in[0,1)\Rightarrow[x]>1\Rightarrow[x]=n,\{x\}=\frac{1}{n},n\in\mathrm{N},n\geq 2$ -- 2p

Cum $x=[x]+\{x\}$, obținem că mulțimea soluțiilor este $S=\left\{n+\frac{1}{n}\middle|n\in\mathrm{N},n\geq 2\right\}$ -- 2p

Problema 2. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ și $a^2+b^2+c^2=4$, demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^3}{b+3c}+\frac{b^3}{c+3a}+\frac{c^3}{a+3b}\geq 1.$$

Soluție și barem Folosim inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică. Obținem:

$\frac{16a^3}{b+3c}+a(b+3c)\geq 2\sqrt{\frac{16a^3}{b+3c}\cdot a(b+3c)}=8a^2$ -- 3p

Folosind și analoagele inegalității precedente, rezultă

$\frac{a^3}{b+3c}+\frac{b^3}{c+3a}+\frac{c^3}{a+3b}\geq\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)}{4}$ -- 2p

Folosim $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$ -- 1p

Obținem $\frac{a^3}{b+3c}+\frac{b^3}{c+3a}+\frac{c^3}{a+3b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{4}=1$ -- 1p

Problema 3. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă care nu conține punctul A intersectează dreptele AB, AC și AD în punctele B_1, C_1, respectiv D_1. Arătați că dacă $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \cdot \overrightarrow{AC}$, atunci $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3}$

Soluție și barem

Fie $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Rezultă că $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \cdot \vec{a}, \overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \cdot \vec{b}$ și $\overrightarrow{AC} = \lambda_3 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ---------------------1p

$\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB_1} = -\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot \vec{a} + \lambda_3 \cdot \vec{b}$ ------------------------------------2p

B_1, C_1 și D_1 coliniare $\Leftrightarrow$ Vectorii $\overrightarrow{B_1C_1}$ și $\overrightarrow{B_1D_1}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{-\lambda_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ ------------------------------3p

Ultima relație este echivalentă cu $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3}$ --1p

Problema 4. Vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ de modul 1 sunt situați în același semiplan limitat de o dreaptă care trece prin O. Arătați că $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| > 1$.

Soluție și barem Fără a restrânge generalitatea presupunem că $B \in Int\left(\widehat{AOC}\right)$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 1 \Rightarrow OAMC$ este romb, deci $(OM$ este bisectoarea lui $\widehat{AOC}$ -----------------2p

Rezultă că $m\left(\widehat{AOM}\right) = m\left(\widehat{MOC}\right) < 90°$ --1p

Ca urmare $m\left(\widehat{BOM}\right) < 90°$ (1) --1p

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}$, $OMPB$ paralelogram (2) --1p

Din (1) și (2) rezultă $OP > OB = 1$ ---1p

În concluzie $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = OP > 1$ --1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.