INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN

MUREŞ

www.edums.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a XI-a

Subiectul I

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(C)$. Să se calculeze A^n și $\det(A^n)$,unde n este un număr natural nenul.

Subiectul II

Se consideră matricele $A, B \in M_n(R)$ cu proprietatea că $B - A = I_n$. Ce condiție trebuie să îndeplinească matricea A astfel încât, oricare ar fi $k \in N^*$, să aibă loc egalitatea

$$B + B^2 + \ldots + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2} \cdot A\ ?$$

Subiectul III

Se consideră șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ cu $u_0 = \frac{11}{4}$ și $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$. Arătați că $(u_n)_{n\geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

Supliment Gazeta Matematică

Subiectul IV

Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_{n+1}=x_n+e^{-x_n}$, $\forall n\geq 1$ și $x_0 \in R$.
Arătați că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}=1$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Rezolvare. Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(C)$. Să se calculeze A^n și $\det(A^n)$,unde n este un număr natural nenul.

Soluție

Calculând A^2, A^3, A^4 se observă că elementele de pe diagonala principală rămân aceleași egale între ele cât și elementele de deasupra și dedesubtul diagonalei principale. Atunci, folosind metoda cu șiruri avem $A=\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

Din $A^{n+1}=A^nA$ obținem relațiile $a_{n+1}=2b_n$ și $b_{n+1}=a_n+b_n$ care conduc la recurența liniară $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n=0$ cu $a_1=0$ și $a_2=2$ .... (4 puncte)

Găsim $a_n=\frac{1}{3}[2^n+2(-1)^n]$ și $b_n=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]$ ....(2 puncte)

Avem relația $\det(A^n)= (\det A)^n= 2^n$ ....(1 punct)

SUBIECTUL II Se consideră matricele $A, B \in M_n(R)$ cu proprietatea că $B - A = I_n$. Ce condiţie trebuie să îndeplinească matricea A astfel încât, oricare ar fi $k \in N^*$, să aibă loc egalitatea

$$B + B^2 + ... + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2} \cdot A \text{ ?}$$

Soluție. Pentru $k = 1 \Rightarrow B = I_n + A$ **3p**

Pentru $k = 2 \Rightarrow B + B^2 = 2I_n + 3A$

$B + B^2 = 2I_n + 3A + A^2$, deci $A^2 = O_n \Rightarrow A^m = O_n, \forall m \geq 2, m \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow B^m = (I_n + A)^m = I_n + mA$ de unde relatia. **2p**

În concluzie $A^2 = O_n$ **2p**

SUBIECTUL III Se consideră șirul $(u_n)_{n\geq1}$ cu $u_0 = \frac{11}{4}$ și $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$. Arătați că $(u_n)_{n\geq1}$ este convergent și determinați limita sa.

Supliment Gazeta Matematică

Soluție.

Șirul$(u_n)_{n\geq1}$ este strict crescător (demonstrație prin inducție)....................... ……(2p)

Șirul $(u_n)_{n\geq1}$este mărginit, și anume $u_n \in \left[\frac{11}{4}, 4\right]$, $\forall n \geq 1$ (demonstrație prin inducție).(2p)

Deci șirul $(u_n)_{n\geq1}$ este convergent. Fie

$$l = \lim_{n\to\infty} u_n$$

Trecând la limită în relația de recurență se obține $l_1 = 4$ și $l_2 = 2 \notin \left[\frac{11}{4}, 4\right]$ deci

$\lim_{n\to\infty} u_n = 4$. (3p)

SUBIECTUL IV Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin x_{n+1}=x_n+e^{-x_n} , ∀n≥1 şi $x_0 \in$ R . Arătați că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$=1.

Soluție. Din x_{n+1}- x_n=e^{-x_n} >0 , ∀n≥1 rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq1}$este strict crescător..................(1 punct)

Dacă ar fi mărginit , șirul ar avea limită finită l ∈ R. Trecând la limită în relația de recurență obținem e^{-l}=0 ,fals . Deci, $\lim_{n\to\infty} x_n$=∞...(1 punct)

Aplicăm lema lui Stolz-Cesaro și avem:

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$= $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}$= $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{x_n}}$=$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_{n+1}}-e^{x_n}}$=$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_n}(e^{x_{n+1}-x_n}-1)}$

=$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_n}\,(x_{n+1}-x_n)}$==$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_n}e^{-x_n}}$=1...(5 puncte)

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem