Olimpiada Naţională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Satu Mare, 6 aprilie 2018

Problema 1. Arătaţi că ecuaţia $x^2+y^2+z^2=x+y+z+1$ nu are soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

* * *

Soluţie:
Ecuaţia se poate scrie echivalent sub forma $(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z-1)^2=7$. ...**1p**
Dacă această ecuaţie ar avea o soluţie raţională (x,y,z), notând $2x-1=\frac{a_1}{b_1}$, $2y-1=\frac{a_2}{b_2}$, $2z-1=\frac{a_3}{b_3}$ am obţine că numerele întregi a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3 satisfac egalitatea $(a_1b_2b_3)^2+(b_1a_2b_3)^2+(b_1b_2a_3)^2=7(b_1b_2b_3)^2$. **2p**
Acest fapt ar implica existenţa a patru numere întregi a,b,c,d astfel ca $a^2+b^2+c^2=7d^2$. Dacă c.m.m.d.c.$(a,b,c,d)=k$, împărţind cu k^2 am găsi o soluţie $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ a ecuaţiei $a^2+b^2+c^2=7d^2$ cu c.m.m.d.c.$(a,b,,c,d)=1$. Atunci a,b,c,d nu pot fi toate pare. Deoarece un pătrat perfect dă unul din resturile 0, 1 sau 4 la împărţirea cu 8, membrul stâng dă unul din resturile 1, 2, 3, 5 sau 6 la împărţirea cu 8, în vreme ce $7d^2$ dă rest 0, 4 sau 7. Prin urmare egalitatea nu poate avea loc....................**4p**

Problema 2. Fie numerele reale pozitive a,b,c astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$. Arătaţi că

$$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}\geq 4a^2+3b^2+2c^2.$$

Când are loc egalitatea?

Marius Stănean, Zalău

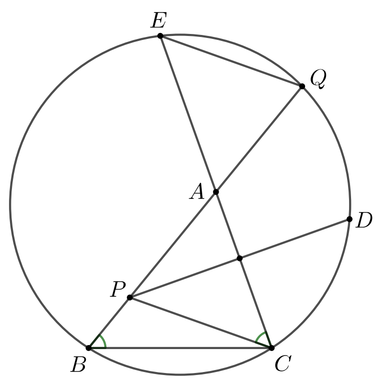
Soluţia 1:
Inegalitatea se poate scrie astfel $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{5}{c}+b^2+2c^2\geq 4(a^2+b^2+c^2)$ **2p**
Aplică inegalitatea mediilor (pe bucă ţi sau pentru 12 numere) **4p**
Egalitatea are loc atunci când $a=b=c=1$. **1p**

Soluţia 2:
Avem $x^3-3x+2\geq 0$, $\forall\, x\geq 0$. Deducem că $\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{2}$. **3p**
Scriind această inegalitate pentru a,b,c şi înmulţind cu 1, 3, respectiv 5, obţinem prin adunare $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{5}{c}\geq\dfrac{27}{2}-\dfrac{a^2+3b^3+5c^2}{2}$. Folosind că $27=9(a^2+b^2+c^2)$ se obţine concluzia. **3p**
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$. **1p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare astfel încât $AB > AC$. Punctul $P \in (AB)$ are proprietatea că $\angle ACP \equiv \angle ABC$. Fie D simetricul lui P faţă de AC şi E punctul în care cercul circumscris triunghiului BCD taie a doua oară dreapta AC. Demonstraţi că $AE = AC$.

Vlad Robu, Baia Mare

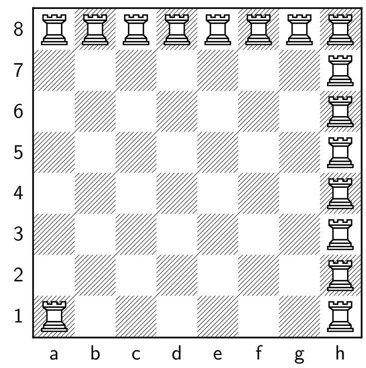
Soluţie: Fie Q punctul în care cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB. Atunci $\angle QEA \equiv \angle QBC \equiv \angle ECP$, deci $EQ \parallel PC$. **2p**
În plus, $\angle ECP \equiv \angle ECD$ implică $QD \parallel EC$, deci $EQ = CD = CP$.................. **4p**
Deducem că $EQCP$ este paralelogram, de unde concluzia........................... **1p**



Problema 4. Care este numărul maxim de ture ce se pot plasa pe o tablă de şah astfel încât orice tură să atace exact două alte ture?

Alexandru Mihalcu, Oxford

Soluţie:
Spunem că turele de pe tablă sunt de două feluri:
de tipul $T1$ dacă sunt atacate din direcţii perpendiculare, respectiv de tipul $T2$ dacă sunt atacate din aceeaşi direcţie, dar sens contrar.
Presupunem că putem plasa maxim x ture, m de tipul $T1$ şi n de tipul $T2$. Observăm că orice tură de tipul $T1$ determină 2 linii de pe care este atacată (din cele 16 ale tablei: 8 orizontale şi 8 verticale), iar exact o altă tură de tipul $T1$ se află pe oricare dintre aceste două linii. Pentru turele de tipul $T2$, putem observa că ele nu pot fi atacate din altă direcţie în afara celei din care sunt atacate deja, deci pentru fiecare din cele m ture, există m linii care nu mai pot fi ocupate de alte ture. În total am putea avea $\dfrac{2n}{2} + m = n + m$ linii. Deci $16 \geq m + n = x$. **5p**
Problema se termină când găsim un exemplu cu 16 ture: **2p**


8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h