INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 14.02.2014
Clasa a X-a

1. (4p) a) Arătați că, pentru orice numere complexe z_1, z_2, are loc egalitatea:

$$4|z_1+z_2|^2+|z_1-2z_2|^2+|-2z_1+z_2|^2=9|z_1|^2+9|z_2|^2.$$

(3p) b) Calculaț i în funcț ie de numerele complexe $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, n \in N^*$, suma $\sum_{k=1}^{n} |S - tz_k|^2$, unde $S = z_1 + z_2 + \cdots z_n,\ t \in N^*$..

Ileana Oțoiu, Doriana Dorca

2. (7p) Fie $a \in (0,+\infty), n \in N, n \geq 2$ şi numerele:

$$x = \sqrt[4^n-1]{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{a}\right)^{2^n}},\quad y = \sqrt[n]{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n^2+n]{a}\right)^{n+1}}.$$

Arătați că $x^{2^n+1} = y$.

***

3. (7p) Rezolvați în $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2^x+3^x=3y+2 \\ 2^y+3^y=3z+2 \\ 2^z+3^z=3x+2 \end{cases}.$$

Petru Vlad

4. Fie $n \in N, n \geq 2, a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ sau $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1,+\infty)$. Demonstrați inegalitățile:

(4p) a) $log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{log_{a_3} a_1} \geq 6$.

(3p) b) $log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{log_{a_3} a_4} + \cdots + n\sqrt[n]{log_{a_n} a_1} \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

GM12/2013

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM Clasa a X-a, 2014

1. a) $4|z_1+z_2|^2+|z_1-2z_2|^2+|-2z_1+z_2|^2=$
$=4(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-2z_2)(\bar{z}_1-2\bar{z}_2)+(-2z_1+z_2)(-2\bar{z}_1+\bar{z}_2)=$.................**(2p)**
$=9|z_1|^2+9|z_2|^2$...**(2p)**
b) $\sum_{k=1}^{n}|S-tz_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(S-tz_k)(\bar{S}-t\bar{z}_k)$...**(1p)**
$\sum_{k=1}^{n}(S\cdot\bar{S}-tS\bar{z}_k-t\bar{S}z_k+t^2|z_k|^2)$...**(1p)**
$(n-2t)|S|^2+t^2\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$..**(1p)**

2. $x=\sqrt[4^n-1]{\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}}=$ ....**(1p)**

$=a^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\cdot 2^n\cdot\frac{1}{4^n-1}}=a^{\frac{2^n-1}{2^{2n}-1}}$
....**(2p)**

$y=a^{\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n}}$ ....**(1p)**

$=a^{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=a$ ....**(2p)**

$x^{2^n+1}=a^{\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}-1}}=a=y$...**(1p)**

3. Sistemulesteciclic. Presupunem că (x,y,z)este soluţ ie a sistemului ş i $x>y$
$x>y\Longrightarrow 3y+2=2^x+3^x>2^y+3^y=3z+2\Longrightarrow y>z$...................................**(1p)**
$3z+2=2^y+3^y>2^z+3^z=3x+2\Longrightarrow z>x$,
contradicţ ie..**(1p)**
Analog pentru $x<y$,deci $x=y$, iar apoi
$x=y=z$..**(1p)**
Avem că
$2^x+3^x=3x+2$...**(1p)**
Dar $f:R\to R, f(x)=2^x+3^x$ este o funcție convexă şi reprezentarea geometrică a graficului funcțieig $g:R\to R, g(x)=3x+2$ este o dreaptă. Folosind lectura grafică deducem că intersecţ ia este posibilă în cel mult două puncte distincte...**(2p)**

$x = 0$, $x = 1$ verifică ecuaţ ia,
deci$S = \{(0,0,0), (1,1,1)\}$...**(1p)**

4.a) Aplicăm inegalitatea mediilor

$log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{log_{a_3} a_1} \geq 6\sqrt[6]{log_{a_1} a_2\left(\sqrt{log_{a_2} a_3}\right)^2\left(\sqrt[3]{log_{a_3} a_1}\right)^3}$=..................(
2p)
$6\sqrt[6]{log_{a_1} a_2 \cdot log_{a_2} a_3 \cdot log_{a_3} a_1}$...(
2p)
b) Din inegalitatea mediilor obținem
$log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{\log_{a_3} a_4} \cdots + n\sqrt[n]{log_{a_n} a_1} \geq$
$\frac{n(n+1)}{2} \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{log_{a_1} a_2 \cdot log_{a_2} a_3 \cdots log_{a_n} a_1} = \frac{n(n+1)}{2}$
....**(3p)**