MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a IX–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

a) Rezolvați în $\boldsymbol{R}$ ecuația $\left[\frac{2x-3}{4}\right] = x - 1$.

b) Demonstrați că $|3x-7| + 3|x-3| \geq 2$, *pentru orice număr real* x.

SOLUȚIE:

a) Cum $x - 1 = \left[\frac{2x-3}{4}\right]$ rezultă că $x - 1 \in \boldsymbol{Z}$, deci $x \in \boldsymbol{Z}$...1p

$\frac{2x-3}{4} - 1 < \left[\frac{2x-3}{4}\right] \leq \frac{2x-3}{4}$ 1p

$\frac{2x-3}{4} - 1 < x - 1 \leq \frac{2x-3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ 2p

$x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \boldsymbol{Z} \Rightarrow x \in \{-1, 0\}$ 1p

b) $|3x-7| + 3|x-3| = |3x-7| + |3x-9| = |3x-7| + |9-3x| \geq$ 1p

$\geq |3x-7+9-3x| = 2$..........................1p

Subiectul 2.

La Grădina Botanică "Anastasie Fătu" din Iași s-a organizat o expoziție de plante exotice. În primele 15 zile numărul vizitatorilor a crescut cu același număr de persoane de la o zi la alta iar din a 16-a zi numărul acestora s-a înjumătățit în raport cu ziua precedentă. În cea de a 15-a zi numărul vizitatorilor a fost de 8 ori mai mare decât în prima zi iar în a 5-a zi au fost înregistrați 600 de vizitatori. Notăm cu a_n *numărul de vizitatori din cea de a n-a zi.*

a) Să se determine a_1, a_{15} *și* a_{17}.

b) Să se determine după câte zile numărul de vizitatori înregistrați a fost 15050 .

c) Stabiliți dacă mai există o zi în care expoziția a fost vizitată de același număr de persoane ca în cea de-a 17- a zi.

SOLUȚIE:

a) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}$ formează o progresie aritmetică crescătoare cu rația r , iar $a_{15}, a_{16}, a_{17} \ldots$ formează o progresie geometrică descrescătoare cu rația $q = \frac{1}{2}$ 1p

Cf. enunțului $a_{15} = 8 \cdot a_1$ și $a_5 = 600$ deci $\begin{cases} a_1 + 14r = 8 \cdot a_1 \\ a_1 + 4r = 600 \end{cases}$ și găsește $r = 100$, $a_1 = 200$.............................1p

Calculează $a_{15} = a_1 + 14r = 1600$ și $a_{17} = a_{15} \cdot q^2 = 1600 \cdot \frac{1}{4} = 400$...1p

b) Calculează $a_1 + a_2 + \ldots a_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = 13500$ 1p

$$a_{16}+a_{17}+\ldots+a_n=a_{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+a_{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+a_{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-15}=1600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-15}-1}{-\frac{1}{2}}=1600\left(1-\frac{1}{2^{n-15}}\right)$$

$1600\left(1-\frac{1}{2^{n-15}}\right)=15050-13500=1550\Rightarrow 1-\frac{1}{2^{n-15}}=\frac{1550}{1600}\Rightarrow 2^{n-15}=32\Rightarrow n=20$ 1p

c) Explică faptul că egalitatea $a_m = a_p$ poate avea loc doar dacă $1 \le m \le 15$ și $16 \le p \le 20$ 1p

$a_{17}=a_1+(m-1)r\Rightarrow 400=200+(m-1)\cdot 100\Rightarrow m=3$ adică în cea de a treia zi. 1p

Subiectul 3.

a) Determinați funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, care verifică pentru orice $x\in\mathbf{R}$, relația $2f(x)-3f(-x)=5x-2$.
b) Determinați funcțiile $f\circ g$ și $1_{\mathbf{R}}\circ g$ pentru $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2$ și $g(x)=-2x+1$. Precizați punctele de intersecție ale graficului funcției $f\circ g$ cu axele de coordonate.

SOLUȚIE:

a) Pentru $x\to -x$ relația din enunț devine $2f(-x)-3f(x)=-5x-2$ 1p

Rezolvă sistemul $\begin{cases} 2f(x)-3f(-x)=5x-2 \\ -3f(x)+2f(-x)=-5x-2 \end{cases} \Rightarrow -5f(x)=-5x-10$ 1p

Obține $f(x)=x+2$ 1p

b) $f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, (f\circ g)(x)=-2x+3$ 1p

$1_{\mathbf{R}}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $1_{\mathbf{R}}(x)=x$, $1_{\mathbf{R}}\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $(1_{\mathbf{R}}\circ g)(x)=-2x+1$ 1p

$(f\circ g)(x)=0\Rightarrow G_{f\circ g}\cap Ox=A(\frac{3}{2},0)$ 1p

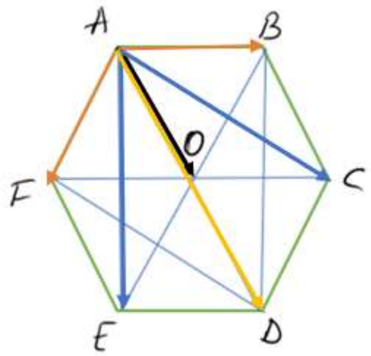
$(f\circ g)(0)=3\Rightarrow G_{f\circ g}\cap Oy=B(0,3)$ 1p

Subiectul 4.

În Munții Apuseni, în zona turistică Arieșeni, se pot vizita o multitudine de peșteri aflate pe trasee turisitice accesibile. Șase dintre ele,notate cu A,B,C, D E, F formează pe hartă un hexagon regulat. Trei echipe de cercetași E1, E2, E3 au plecat simultan de la peștera A spre peștera D pe traseele A-B-D, A-F-D și respectiv A-E-D deplasându-de doar în linie dreaptă cu viteze de deplasare constante x, y, respectiv z (m/s). Știind că x,y,z verifică relațiile : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=x\cdot\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=y\cdot\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}=z\cdot\overrightarrow{AO}$, unde O este centrul hexagonului, să se determine :

a) Vitezele de deplasare ale celor trei echipe;
b) Ordinea sosirii echipelor la destinație ;
c) Distanţele parcurse de cele trei echipe, ştiind că latura hexagonului este de 4 cm iar scara hărții este de 1 : 100.000, (se aproximează $\sqrt{3}\simeq 1,73$).

SOLUȚIE:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$ (reg. paralelogramului) $\Rightarrow x=1\ {m}/{s}$
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=2\cdot\overrightarrow{AO}\Rightarrow z=2\ {m}/{s}$ ………………...………1p

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\underbrace{\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)}_{reg\ \Delta}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}\right)}_{reg\ \Delta}=2\overrightarrow{AO}+\underbrace{\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)}_{\overrightarrow{OD}(reg\ \square)}=2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{AO}$$

Deci din $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=y\cdot\overrightarrow{AO}\ \underbrace{\Rightarrow y=3\ {m}/{s}}_{rel\ (1)}$………..…..……..2p

b) Justifică egalitatea lungimilor celor 3 trasee $AB+BD=AF+FD=AE+ED$ deoarece $AB=AF=ED$(laturi hexagon) și $BD=FD=AE$(diagonale în romburi identice) 1p

Traseele fiind egale, ordinea sosirii este data de ordinea descrescătoare a vitezelor echipelor. Avem că $x<z<y$ deci echipa E2 ajunge prima (are viteză cea mai mare) urmată de echipa E3 iar echipa E1ajunge ultima..1p

c) Calculează lungimea unui traseu pe hartă de exemplu:

$AB+BD=l+2\cdot h_{\Delta BOC_{ech}}=4+2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2}=4\left(1+\sqrt{3}\right)\simeq 4(1+1,73)=10,92\ cm$ ………....…......……1p

Determină distanța reală a traseului: $10,92\ cm\cdot 100000=1092000\ cm=10,92\ Km$……......…......….....1p