MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
SUBIECTE clasa a X-a MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

1.	Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încât $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ și $z_1+z_2+z_3\neq 0$, iar $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=\lvert z_3\rvert=1$. Arătaţi că $\lvert z_1+z_2+z_3\rvert=2$.
2.	Fie A o mulțime nevidă și funcțiile $f, g: A\to A$. a) Să se arate că dacă funcția $g\circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă. b) Să se arate că dacă funcția $g\circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă. c) Să arate că funcția $f\circ g\circ f$ este bijectivă dacă și numai dacă funcțiile f și g sunt bijective.
3.	Să se demonstreze că: a) $\log_2 6 > \frac{625}{256}$; b) $\log_2 3+\log_3 4+\log_4 5+\log_5 6 > 5$.
4.	Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O şi rază 1, D mijlocul lui AB şi E centrul de greutate al triunghiului ACD. Să se demonstreze că dreptele CD şi OE sunt perpendiculare dacă şi numai dacă AB = AC.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

succes !

Prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar pentru matematică – I.Ş.J. Timiş
Lector.dr. Mihai Chiş-preşedinte S.S.M.R. – Filiala Timiş

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A 10-a MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

$(z_1+z_2+z_3)^2=2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$.. ....1p

$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}|=|\frac{z1z2+z2z3+z3z1}{z1\cdot z2\cdot z3}|$ ....,,,,,,..............3p

$|z1\cdot z2\cdot z3|=1$.. 1p

deci $|z_1+z_2+z_3|=\frac{|z1+z2+z3|^2}{2}$..1p

de unde $|z_1+z_2+z_3|=2$, deoarece $z_1+z_2+z_3\neq 0$ 1p

Subiectul 2:

a) Se demonstrează cu definiția că funcția f este injectivă 1p

b) Se demonstrează cu definiția că funcția g este surjectivă 1p

c) Se demonstrează implicația inversă afirmând că prin compunerea de funcții bijective se obține o funcție bijectivă 1p

Pentru implicația directă se scrie h:= $f\circ g\circ f=(f\circ g)\circ f=f\circ(g\circ f)$ și aplicând punctele a) și b) se deduce că funcția f este injectivă, respectiv surjectivă, deci bijectivă și inversabilă 2p

Scriind $f\circ g=h\circ f^{-1}$ bijectivă (deci injectivă) se deduce din a) că g este injectivă; scriind $g\circ f=f^{-1}\circ h$ bijectivă (deci surjectivă) se deduce din b) că g este și surjectivă 2p

Subiectul 3:

a) $\log_2 6>\frac{625}{256}\leftrightarrow 6^{256}>2^{625}\leftrightarrow 36^{128}>32^{125}$...3p

b) din ineg. mediilor avem: $\log_2 3+\log_3 4+\log_4 5+\log_5 6>\sqrt[4]{\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6}$...........2p

dar $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6=4\sqrt[4]{\log_2 6}$ 1p

ceea ce din punctul a) ne conduce la rezultat..1p

Subiectul 4:

Notăm afixele punctelor A,B,C.... cu a,b,c,....., unde $|a|=|b|=|c|=1$ 1p

$d=\frac{a+b}{2}$, $e=\frac{a+d+c}{3}$,...2p

AB=AC $\leftrightarrow$ $|a-b|=|a-c|$ este echivalent cu $cb^2+ca^2=bc^2+ba^2$.. 2p

CD$\perp$OE $\leftrightarrow\frac{d-c}{e}=-\overline{\frac{d-c}{e}}$ este echivalent cu $cb^2+ca^2=bc^2+ba^2$... 2p