CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H1 (Tehnic, Servicii, Uman) - Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție "$\circ$".

$$x \circ y = 2xy - x - y + 1$$

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ y = 2(x-\frac{1}{2})\cdot(y-\frac{1}{2})+k$

b) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \circ a = a \circ x = a, (\forall) x \in \mathbf{R}$

c) Să se arate că "$\circ$" asociativă și să se calculeze:

$$A=(\frac{-2019}{2})\circ(\frac{-2017}{2})\circ\ldots\circ\frac{-1}{2}\circ\frac{1}{2}\circ\frac{3}{2}\circ\ldots\circ\frac{2019}{2}$$

Soluție:

a) $x \circ y = 2(xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) = 2(x-\frac{1}{2})\cdot(y-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$ (1p)

$k = \frac{1}{2}$ (1p)

b) $a \circ x = x \circ a = a, (\forall) x \in \mathbf{R}$

$2(a-\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2} = 2(x-\frac{1}{2})\cdot(a-\frac{1}{2})+\frac{1}{2} = a, (\forall) x \in \mathbf{R}$ (1p)

$(a-\frac{1}{2})\cdot\left[2\cdot(x-\frac{1}{2})-1\right]=0, (\forall) x \in \mathbf{R}$

$a = \frac{1}{2} \in \mathbf{R}$ (1p)

c) $(x \circ y)\circ z = \left[2(x-\frac{1}{2})\cdot(y-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\right]\circ z = 4\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(y-\frac{1}{2})\cdot(z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$

$x \circ (y \circ z) = x \circ \left[2(y-\frac{1}{2})\cdot(z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\right] = 4\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(y-\frac{1}{2})\cdot(z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$

"$\circ$" asociativă (1p)

$A = a \circ \frac{1}{2} \circ b = (a \circ \frac{1}{2}) \circ b = \frac{1}{2} \circ b = \frac{1}{2}$ (2p)

Problema 2

Fie $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2020^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

a) Să se arate ca G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Să se calculeze $A^n(x), n \in \mathbb{N}^*$

c) Știind că $(G,\cdot)$ este grup, să se arate că grupurile $(R,+)$ și $(G,+)$ sunt izomorfe.

Soluție:

a) $(\forall)A(x), A(y) \in G \to A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2020^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2020^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2020^{x+y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y) \in G$ (1p)

$x, y \in \mathbf{R} \to x + y \in \mathbf{R}$

b) $A^n(x) = A(x)\cdot A(x)\cdot ...\cdot A(x) = A(x+x+...+x) = A(n\cdot x), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ (2p)

c) $f : \mathbf{R} \to G, f(x) = A(x)$ (1p)

$f(x_1) = f(x_2) \to A(x_1) = A(x_2) \to x_1 = x_2$ deci f injectiva

$(\forall)A(x) \in G, \exists x \in \mathbb{R}$ astfel incat $f(x) = A(x)$; f surjectiva

f bijectiva (2p)

1) $f(x+y) = A(x+y)$

2) $f(x)\cdot f(y) = A(x)\cdot A(y)$

3) $A(x)\cdot A(y) = A(x+y), (\forall) x, y \in \mathbf{R}$

1) , 2) si 3) $\to f$ morfism (1p)

<u>Problema 3</u>

Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x+2)\cdot e^{-x}$

a. Demonstrați că $\int_0^2 xf(x)e^x dx = \frac{20}{3}$.

b. Demonstrați că orice primitivă a lui f are un singur punct de extrem.

c. Aflați numărul natural n dacă $\int_0^n f(x)dx$ = 3 - 5e^{-n}.

Soluție:

a. a.) I = $\int_0^2 x(x+2)\, dx$ = $\int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx$ (1p)

$I = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \Big/_0^2 = \frac{20}{3}$ (1p)

b.) $F'(x) = f(x) = (x+2)\, e^{-x}$ (1p)

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
F'(x)	-	o	+
F(x)	$\searrow$	F(-2)	$\nearrow$

(1p)

c.) $\int_0^n (x+2)e^{-x}dx = -(x+2)\, e^{-x} \Big/_0^n - \int_0^n -e^{-x}\, dx = [-(x+2)e^{-x} - e^{-x}] \Big/_0^n$ (1p)

$-(n+2)e^{-n} - e^{-n} + 2 + 1 = 3 - 5e^{-n}$ (1p)

$-e^{-n}\,(n+3) = -5e^{-n}$

$n+3 = 5 \qquad n = 2 \in N$ (1p)

<u>Problema 4</u>

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+4} dx, n \in \mathbb{N}$

a) Să se calculeze I_0 si I_1.

b) Să se arate că $I_{n+2} + 4I_n = \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}$

c) Să se arate că $(n+1) \cdot I_n \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right], (\forall) n \in \mathbb{N}$

Soluție:

a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} \Big/_0^1 = \frac{1}{2} arctg \frac{1}{2}$ (1p)

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \Big/_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$ (1p)

b) $I_{n+2} + 4I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+4x^n}{x^2+4} dx = \frac{1}{n+1}$ (2p)

c) $0 \le x \le 1$

$4 \le x^2 + 4 \le 5$

$\frac{x^n}{5} \le \frac{x^n}{x^2+4} \le \frac{x^n}{4}, (\forall) n \in \mathbb{N}$ (1p)

$\frac{1}{5(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{4(n+1)}, (\forall) n \in \mathbb{N}$ (1p)

$$(n+1)\cdot I_n \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \qquad (1p)$$