

Clasa a VIII-a

1. Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât MB , BD și MD sunt direct proporționale cu $\sqrt{34}$, 5 și respectiv $\sqrt{41}$, iar $MC = 15\sqrt{2}$ cm. Calculați dimensiunile dreptunghiului și lungimea segmentului MA .
2. Fie M , N , P , Q patru puncte necoplanare pentru care $MP = MQ = NP = NQ$. Notăm cu S mijlocul segmentului MN .
 - a) Demonstrați că $MN \perp (SQP)$.
 - b) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele MN și PQ .
3.
 - a) Arătați că $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = x^5 + x^4 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine numerele reale x și y , $x < y$, pentru care intervalul (x, y) conține cel puțin două numere întregi și $x^2 + y^2 + x - 5y + 9 = |x - y + 1|$.
4.
 - a) Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $5k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$.
 - b) Arătați că numărul $\sqrt{2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^n + 17}$ este irațional, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.